ИССЛЕДОВАНИЕ ФЛАТТЕРА ЛИНЕЙНОГО ВЯЗКОУПРУГОГО КОНСОЛНОГО СТЕРЖЕНА

М.М. Мансуров
Кокандский филиал Ташкентского государственного технического университета, mansurov00707@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В данной статье *рассматривается задача о флаттере физически линейного вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом линейных зависимостей. Приведена постановка и метод решения задачи флаттера вязкоупругого стержня свободно опертого по концам.*

Ключевые слова: *вязкоупругость, стержень, флаттер, физическая линейность, аэродинамическая линейность, метод Бубнова-Галёркина, ядро релаксации, численный метод, критическая скорость, линейное интегро-дифференциальное уравнение.*

ABSTRACT

This article discusses the problem of the flutter of a physically linear viscoelastic rod in a gas flow, taking into account linear dependencies. The formulation and method of solving the problem of flutter of a viscoelastic rod freely supported at its ends are presented.

Keywords: *viscoelasticity, rod, flutter, physical linearity, aerodynamic linearity, Bubnov-Galerkin method, relaxation kernel, numerical method, critical velocity, linear integro-differential equation.*

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада чизиқли боғликларни ҳисобга олган ҳолда газ оқимидаги физик чизиқли қовушқоқ эластик стерженнинг флаттер ҳолати ҳақидаги масала кўрилмоқда. Масаланинг қўйилиши ва қовушқоқ эластик стерженнинг флаттер ҳолати учун масалани ечиш усули келтирилган.

Таянч сўзлар: *қовушқоқ-эластик, флаттер, физик чизиқлилик, аэродинамик чизиқлилик, Бубнов-Галёркин усули, релаксация ядроси, сонли усул, критик тезлик, чизиқли интегро-дифференциал тенглама.*

ВВЕДЕНИЕ

Наследственная теория вязкоупругости предоставила широкую возможность для описания динамических процессов деформирования разнообразных материалов. Поскольку стержни используются в качестве конструктивных элементов во многих отраслях промышленности и техники, то

VOLUME 1 | ISSUE 11
ISSN 2181-1784
SJIF 2021: 5.423

изучение их динамического поведения при различных формах и исследования конструкций на колебания и динамическую устойчивость с учетом физической линейности материала являются актуальными.

Несмотря на наличие многочисленных работ, посвященных физически линейных колебаний и устойчивости стержней, до настоящего времени недостаточно исследованы по флаттеру линейного вязкоупругого стержня.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу флаттера вязкоупругого стержня с учетом физической линейности [4, 7, 9]

$$\sigma = E\left(1 - R^*\right)\varepsilon, \quad \varepsilon = u_x, \quad u = -zw_x \tag{1}$$

или

$$\sigma = -E\left(1 - R^*\right)zw_{xx} \tag{2}$$

где E – модуль упругости.

Учитываем также влияние аэродинамической линейности, по одномерной теории газа давление газа на поршень который имеет вид [1]:

$$q = \frac{\chi p_\infty}{c_\infty}\left[V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\right]$$

где обозначен $q = p - p_\infty, \quad k = \dfrac{\chi p_\infty}{c_\infty}$

$$q = k\left[V\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial t}\right] \tag{3}$$

Решим задачу о флаттере в линейной вязкоупругой постановке учитывая физические и аэродинамические линейности. С этой целью построим математическую модель для исследования вязкоупругого стержня в потоке газа с учетом этих линейностей.

В данном случае, принимая гипотезу плоских сечений для изгибающего момента используем следующую формулу [2]:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} b(x)\sigma_x z dz \tag{4}$$

(2) поставим в (4) и получаем

$$M_x = -Eb(x)\left(1-R^*\right)\int_{-h/2}^{h/2} z w_{xx} z dz = -Eb(x)\left(1-R^*\right)w_{xx}\int_{-h\backslash 2}^{h/2} z^2 dz =$$

$$= -Eb(x)\left(1-R^*\right)w_{xx}\left.\frac{z^3}{3}\right|_{-h\backslash 2}^{h\backslash 2} = -Eb(x)\left(1-R^*\right)w_{xx}\frac{h^3}{12} =$$

$$= -E\left(1-R^*\right)\frac{b(x)h^3(x)}{12}w_{xx}$$

или

$$M_x = -E\left(1-R^*\right)J_2 w_{xx} \qquad (5)$$

и равные для стержней шириной $b(x)$ и высотой $h(x)$

$$J_2 = \frac{b(x)h^3(x)}{12}.$$

Подставляя (3) и (5) в уравнение равновесия [2] и перейдя к безразмерным координатам и опуская штрихи имеем

$$\left(1-R*\right)\frac{\partial}{\partial x^2}\left[g(x)w_{xx}\right] + F(x)w_{tt} + Pw_x + \gamma w_t = 0 \qquad (6)$$

где

$$w = h_0\overline{w},\ x = a\overline{x},\ t = t_1\overline{t},\ m(x) = m_0\overline{F(x)},\ h(x) = h_0\overline{h(x)},\ b(x) = b_0\overline{b(x)},$$

$$J_2 = J_2^0 g(x), \quad g(x) = b(x)h^3(x), \quad J_2^0 = \frac{b_0 h_0^3}{12},$$

$$P = \frac{kVa^3}{EJ_2^{(0)}}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{m_0 a^4}{EJ_2^{(0)}}}, \quad \gamma = \frac{kza^4}{EJ_2^{(0)}t_1}, \quad F(x) = b(x)h(x)$$

$b(x)=c-a_1x;\ h(x)=1-a_2x;\ c=5$

h_0 – величина высоты стержня в концах, b_0 – величина ширины стержня в концах, m_0 – величина массы соответствующий единичному переменного сечения стержня.

Линейные интегро-дифференциальное уравнение в частных производных (6), вместе с граничными [5] и начальными условиями представляют математическую модель задачи о флаттере линейного вязкоупругого стержня. Требуется найти критические скорости $P_{кр}$ приводящий к нарастающему амплитуде колебаний.

Приближенное решение построим методом Бубнова-Галеркина. Представим решение уравнения (6) в виде

$$w = \sum_{k=1}^{N} u_k(t)\varphi_k(x) \qquad (7)$$

где $\varphi_\kappa(x)$ - известные, базисные функции удовлетворяющие заданным граничным условиям, $u_\kappa(t)$ - неизвестные функции от времени, подлежащие определению.

Для нахождения неизвестных функций $u_\kappa(t)$ подставляем (7) и следующие частные производные в (6)

$$w_x=\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k'(x);\quad w_{xx}=\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k''(x);$$

$$w_t=\sum_{k=1}^{N}\dot u_k(t)\varphi_k(x);\quad w_{tt}=\sum_{k=1}^{N}\ddot u_k(t)\varphi_k(x).$$

получим

$$(1-R^*)\sum_{k=1}^{N}u_k(t)[g(x)\varphi_k''(x)]''+F(x)\sum_{k=1}^{N}\ddot u_k(t)\varphi_k(x)+P\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\varphi_k'(x)+\gamma\sum_{k=1}^{N}\dot u_k(t)\varphi_k(x)=0$$

полученную умножая на $\varphi_i(x)$ и проинтегрируем по x, получаем

$$(1-R^*)\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\int_0^1[g(x)\varphi_k''(x)]''\varphi_i(x)dx+\sum_{k=1}^{N}\ddot u_k(t)\int_0^1F(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx+$$

$$+P\sum_{k=1}^{N}u_k(t)\int_0^1\varphi_k'(x)\varphi_i(x)dx+\gamma\sum_{k=1}^{N}\dot u_k(t)\int_0^1\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx=0$$

Для интегралов вводим обозначения и получим следующие линейные системы обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\left[a_{ki}\ddot u_k(t)+\gamma b_{ki}\dot u_k(t)+\omega_{ki}(1-R^*)u_k(t)+Pd_{ki}u_k(t)\right]=0,\ i=\overline{1,N}\qquad(8)$$

где

$$a_{ki}=\int_0^1F(x)\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx,\qquad b_{ki}=\int_0^1\varphi_k(x)\varphi_i(x)dx,$$

$$\omega_{ki}=\int_0^1\left[d(x)\varphi_k''(x)\right]''\varphi_i(x)dx,\qquad d_{ki}=\int_0^1\varphi_k'(x)\varphi_i(x)dx,$$

Интегрирование линейной системы (8) выполнялось численным методом основанном аналитических преобразований [3], используя ядро Ржаницына–Колтунова $R(t)=A\cdot e^{-\beta t}t^{\alpha-1}$, $A>0$, $\beta>0$, $0<\alpha<1$. Согласно этого метода, численные значения искомых функций $u_\kappa(t_l)=u_{k,l}$ находятся из решения следующей рекуррентной системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^{N}\left[a_{ki}+\gamma\frac{\Delta t}{2}b_{ki}\right]u_{k,l}=\sum_{k=1}^{N}\left[(a_{ki}+\gamma t_l b_{ki})u_{k,0}+t_l a_{ki}\dot u_{k,o}\right]-\sum_{k=1}^{N}\sum_{i_1=1}^{l-1}\left[\gamma A_{i_1}b_{ki}u_{k,i_1}+A_{i_1}(t_l-t_{i_1})\cdot\right.$$

$$\cdot\left(\omega_{ki}\left(u_{k,i_1}-\frac{A}{2}\sum_{i_2=1}^{i_1}B_{i_2}e^{-\beta t_{i2}}u_{k,i_1-i_2+1}\right)+Pd_{ki}u_{k,i_1}\right)\Bigg]\Bigg],\ i=\overline{1,N} \qquad (9)$$

где

$$t_i=i\Delta t,\ B_1=\frac{\Delta t^{\alpha}}{2},\ B_{i_2}=\frac{\Delta t^{\alpha}\left[(i_2+1)^{\alpha}-(i_2-1)^{\alpha}\right]}{2},\ i_2=\overline{2,i_1-1}$$

$$B_{i_1}=\frac{\Delta t^{\alpha}\left[i_1^{\alpha}-(i_1-1)^{\alpha}\right]}{2},\ A_1=\frac{\Delta t}{2},\ A_i=\Delta t,\ i_1=\overline{2,i-1},\ i=1,2.....$$

Вычисление проводилось при различных реологических параметров и форм стержня в плане. Расчет произведен как в идеально упругой так и для вязкоупругой стержня.

В качестве базисных функций $\varphi_k(x)$ консольного стержня, принимаются балочные функции

$$\varphi_k(x)=\sin\lambda_k x-sh\lambda_k x-\frac{\sin\lambda_k+sh\lambda_k}{\cos\lambda_k+ch\lambda_k}(\cos\lambda_k x-ch\lambda_k x);$$

$$\lambda_1=1.875,\quad \lambda_2=4.694,\quad \lambda_3=7{,}855,\quad \lambda_4=10{,}996,\ldots,\quad \lambda_k=\frac{\pi}{2}(2k-1)$$

а для начальных условий

$$u_k(0)=\int_0^1\alpha_0(x)\varphi_k(x)dx,\quad \dot u_k(0)=0$$

где $\alpha_0(x)=\left\{[x(1-x)]^4+\varphi_1(x)\right\}/100$

Анализ и заключение. Анализ результатов физически нелинейных задач, приведенных на таблице показывает, что критическая скорость определяется по линейной теории как в идеально-упругих так и в вязкоупругих постановках, оказывается лишь верхней границей критических скоростей для реальных конструкций.

Поперечное сечение балки изменяется по закону $b(x)=c-\alpha_1 x;\ h(x)=1-\alpha_2 x;$ где c=5. N – число членов в решение.

N	***A***	***α***	***β***	***α₁***	***α₂***	***γ***	***P*кр.**
2 3 4	0.0	0.25	0.05	4.0	0.2	0.0	27.61 24.42 26.48
2	0.0	0.25	0.05	4.0	0.2	0.5	27.55
2	0.01 0.03 0.05	0.25	0.05	4.0	0.2	0.0	26.65 24.54 22.63

VOLUME 1 | ISSUE 11
ISSN 2181-1784
SJIF 2021: 5.423

	0.08						19.74
2	0.05	0.25	0.05	4.0	0.2	0.5 1.0	22.32 22.14
2	0.05	0.15 0.35 0.5	0.05	4.0	0.2	0.5	20.57 23.28 23.31
2	0.05	0.25	0.01 0.07 0.1	4.0	0.2	0.5	22.37 22.48 22.59
2	0.05	0.25	0.05	1.0 2.0 3.0	0.2	0.5	26.61 25.12 23.87
2	0.05	0.25	0.05	4.0	0.1 0.5 0.8	0.5	24.36 17.10 12.08

При изучении влияния параметров достаточно считать количество слагаемых при решении N=2. Так как, из таблицы видна в упругом состоянии при N=2 значение критической скорости равна $Pкр$=27.61, при N=3 значение критической скорости равна $Pкр$=24.42, при N=3 значение критической скорости равна $Pкр$=26.48. Наблюдается снижение значения критической скорости упругого состояния ($Pкр$=27.61) относительно вязкого состояния (A=0.05, Ркр=22.63), которая показывает 18,0%. Изучены влияния параметров ***A*, α** и **γ** (см.таблицу). Эффекты, вызванные учетом наследственных свойств материала стержня на критическую скорость, в линейной постановке оказались существенными, например, незначительное уменьшение или увелечение параметра сингулярности **α** приводит к существенному повышению: при α=0.15 ($Pкр$=20.57), при α=0.5 ($Pкр$=23.31) на 11.8% выше. Незначительное увеличение параметра вязкости ***A*** приводит к существенному уменьшению: при A=0.01 ($Pкр$=26.65), при A=0.5 ($Pкр$=19.74) на 25.9% ниже. При γ=0.5 значение критической скорости равна $Pкр$=27.55. Ниже чем при γ=0.0. Влияние параметра β незначительно.

Форма стержня в плане во многом уже переопределяет величину остальных конструктивных параметров стержня. С этой цели рассмотрена серия стержней, имеющих в плане форму трапеции переменной ширины (параметра α_1) и толщины (параметра α_2). Когда трапециальная форма стержня изменяется за счет параметров α_1 и α_2 влияние формы существенны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы сведены к следующему:

1. На базе теории вязкоупругости сформулирована краевая задача по динамическому расчету физически линейного стержня из– вязкоупругого материала.

2. Разработан и реализован на компьютере общий вычислительный алгоритм построения исходных соотношений метода Бубнова – Галеркина применительно к краевым задачам динамического расчета стержня.

REFERENCES

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1967
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1972
3. Бадалов Ф. Б. Методы решения интегральных и интегро – дифференциальных уравнений наследственной теории вязкоупругости. Ташкент, «Мехнат», 1987. 269с.
4. Бадалов Ф.Б. Метод степенных рядов в нелинейной теории вязкоупругости. Ташкент, «ФАН» 1980. 221с.
5. Бабаков И.М. Теория колебаний. Изд. «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. Москва, 1968.
6. Ильюшин А.А. Закон плоских сечений в аэродинамике больших сверхзвуковых скоростях. ПММ. 1956 . Т.20 № 6 с 733-755.
7. Эшматов Х.Э., Насретдинова Ш.С. Математическое моделирование нелинейных задач динамики вязкоупругих систем.Т., «Молия», 2000, 108 с.
8. Бадалов Ф.Б., Ганиханов Ш.Ф. Вибрация наследственно-деформируемых элементов конструкции летательных аппаратов. Т., ТашГАИ, 2000, 141 с.
9. Абдикаримов Р.А., Мансуров М.М., Акбаров У.Й.Численное исследование флаттера вязкоупругого жестко-защемленного стержня с учетом физическойи аэродинамической нелинейностей. Вестник РГГУ. *Серия* «Информатика.Информационная безопасность. Математика». Научный журнал. М., 3/2019, 94-106 с.

10.Abdikarimov R.A., Mansurov M.M., PulatovSh.Y.Influence of the rod shape on the critical flutter speed articulated at the ends. International Journal of Applied Research 2020. No.6(8), P.30-34.

11.Абдикаримов Р.А., Акбаров У.Й.,Пулатов Ш.Й., Мансуров М.М. Флаттер вязкоупругого стержня шарнирно-опертого по концам. Научно–технический журнал ФерПИ, 2020. Том 24, №3

12. Абдикаримов Р.А., Мансуров М.М., Акбаров У.Й. Численное исследование флаттера вязкоупругого жестко-защемленного стержня с учетом физической и аэродинамической нелинейностей. Вестник РГГУ. *Серия* «Информатика. Информационная безопасность. Математика». Научный журнал. М., 3/2019, 94-106 с

13. М.М. Мансуров, У. Акбаров Флаттер линейного вязкоупругого стержня, свободно опертого на концах. Научный вестник НамГУ. № 3, 2021. С. 36-43.

14. R.A.Abdikarimov, D.A.Khodzhaev, B.A.Normuminov, M.M. Mirsaidov Investigation of parametric vibrations of a viscoelastic cylindrical panel of variable thickness. // Bulletin of MGSU, 2018.T.13. Issue 11. with. 1315-1325

15. Абдикаримов Р.А., Мансуров М.М. Явление флаттера для свободно опертого вязкоупругого стержня с физическими нелинейными свойствами. // Актуальные проблемы математики и прикладной математики в период глобализации. Научно-практическая конференция. ТГТУ, Ташкент, 2021, 1-2 июня