Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Research BIB / Index Copernicus
(E)ISSN: 2181-1784
6(4), 2026
www.oriens.uz

TO‘LQIN TENGLAMASI, MATEMATIK MODEL VA REAL HAYOTDAGI MISOLLAR

Jonqobilov J.T.
Olmaliq davlat texnika instituti
“Matematika va tabiiy fanlar ” kafedrasi assistenti
jonqobilovjaxongir70@gmail.com

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada to‘lqin tenglamasining matematik modeli, uning fizik mazmuni va turli sohalardagi qo‘llanilish xususiyatlari yoritilgan. To‘lqin tenglamasi elastik muhitda energiyaning tarqalishini ifodalovchi ikkinchi tartibli qisman differensial tenglama bo‘lib, d’Alembert yechimi, stasionar to‘lqinlar va chegaraviy shartlar kontekstida tahlil qilingan. Shuningdek, tenglamaning real hayotdagi qo‘llanilishlari — tor tebranishlari, akustik jarayonlar, elektromagnit to‘lqinlar, suv to‘lqinlari va seysmik hodisalarni modellashtirishda tutgan o‘rni batafsil ko‘rsatib berilgan. Maqola to‘lqin jarayonlarini matematik nuqtai nazardan tushuntirib, ularning amaliy ahamiyatini ochib beradi.

Kalit so‘zlar: *To‘lqin tenglamasi, Dalembert yechimi, qisman differensial tenglamalar, akustika, elektromagnit to‘lqinlar, seysmik jarayonlar.*

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается математическая модель волнового уравнения, его физический смысл и особенности применения в различных областях. Волновое уравнение представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка, описывающее распространение энергии в упругой среде. В работе анализируются решение д’Аламбера, стационарные волны и краевые условия. Кроме того, подробно показано применение волнового уравнения в реальной жизни — колебания струн, акустические процессы, электромагнитные волны, поверхностные волны на воде и моделирование сейсмических явлений. Статья объясняет волновые процессы с математической точки зрения и раскрывает их практическую значимость.

Ключевые слова: *волновое уравнение, решение Даламбера, дифференциальные уравнения в частных производных, акустика, электромагнитные волны, сейсмические процессы.*

ANNOTATION

This article discusses the mathematical model of the wave equation, its physical meaning, and its applications in various fields. The wave equation is a second-order *partial differential equation that describes the propagation of energy in an elastic medium. The paper analyzes the d'Alembert solution, standing waves, and boundary conditions. Additionally, real-world applications of the wave equation—such as string vibrations, acoustic processes, electromagnetic waves, water surface waves, and seismic modeling—are described in detail. The article explains wave phenomena from a mathematical perspective and highlights their practical significance.*

Keywords: *wave equation, Dalembert solution, partial differential equations, acoustics, electromagnetic waves, seismic processes.*

KIRISH

To'lqinlar tabiatning eng asosiy va universal hodisalaridan biri bo'lib, ular fizik jarayonlarning turli ko'rinishlarida namoyon bo'ladi. Tovushning havo orqali tarqalishi, suv sathidagi tebranishlar, elastik muhitda yuzaga keladigan mexanik tebranishlar, yorug'likning elektromagnit tabiati hamda Yer qobig'ida sodir bo'ladigan seysmik jarayonlar — bularning barchasi to'lqinlar nazariyasi bilan chambarchas bog'liqdir. Bu kabi xilma-xil jarayonlarning umumiy matematik modeli sifatida to'lqin tenglamasi qo'llanadi. Mazkur tenglama qisman differensial tenglamalar nazariyasining asosiy bo'limlaridan birini tashkil etadi va energiyaning vaqt va fazo bo'yicha qanday tarqalishini aniq tavsiflab beradi.

To'lqin tenglamasining universalligi uning turli fizik muhitlarda ham bir xil matematik shaklga ega bo'lishidadir. Masalan, gitara torining tebranishi bilan elektromagnit to'lqinlarning tarqalishi tabiatda butunlay boshqa jarayonlar bo'lishiga qaramay, ularning har ikkisi ham bir xil matematik tenglama orqali ifodalanishi mumkin. Bu esa to'lqin tenglamasini fizikadagi fundamental qonuniyatlardan biriga aylantiradi. Tenglamaning umumiy ko'rinishi ikkinchi tartibli qisman differensial tenglama sifatida ifodalanib, uning yechimlari to'lqinlarning yo'nalishi, shakli, tezligi va energiya taqsimotini o'rganishga imkon beradi.To'lqin tenglamasining ahamiyati nafaqat nazariy fizika yoki matematikada, balki amaliy fanlarda ham juda katta. Bugungi kunda akustika, optika, radioaloqa, telekommunikatsiya texnologiyalari, seysmologiya, geofizika, qurilish muhandisligi va hatto biomeditsina kabi ko'plab yo'nalishlarda to'lqin jarayonlarini modellashtirish zarurati mavjud. Masalan, seysmik to'lqinlar yordamida Yer qatlamlarining tuzilishi o'rganiladi, radio to'lqinlar esa global aloqa tizimlarini ta'minlaydi. Shuningdek, suv yuzasidagi to'lqinlar gidravlika va gidromexanik tizimlarning samaradorligini baholashda muhim omil sanaladi.Shu boisdan mazkur maqolada to'lqin tenglamasining matematik tuzilishi, uning fizik mohiyati, yechim usullari hamda real hayotdagi qo'llanilish sohalari batafsil tahlil qilinadi. Ushbu yondashuv orqali to'lqin jarayonlarining matematik asoslari chuqur yoritilib, turli sohalarda uchraydigan murakkab to‘lqin hodisalarining umumiy tabiatini anglash imkoniyati yaratiladi.

Asosiy qism.

1. To‘lqin tenglamasining matematik tuzilishi

To‘lqin tenglamasi elastik muhitda energiyaning tarqalishini tasvirlaydigan ikkinchi tartibli qisman differensial tenglama bo‘lib, eng sodda bir o‘lchamli ko‘rinishda quyidagicha ifodalanadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Bu yerda u(x,t) — muhitning og‘ishi, c — to‘lqin tarqalish tezligi. Ushbu tenglama muhitning elastiklik xususiyatlari va zichligiga bevosita bog‘liq. Tarqalish tezligi odatda quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$c = \sqrt{\frac{T}{p}}$$

Bu formula torlarning tarangligi va zichligi bilan bog‘liq bo‘lib, to‘lqinlarning fizik tabiatini sharhlab beradi.

2. Dalembert yechimi va uning fizik mazmuni.

To‘lqin tenglamasining eng mashhur analitik yechimlaridan biri fransuz matematigi d’Alembert tomonidan keltirib chiqarilgan:

$$c(x,t) = F(x - ct) + G(x + ct)$$

Bu yechimning fizik talqini shundan iboratki, to‘lqin har qanday vaqt momentida ikki yo‘nalishda — o‘ngga va chapga — bir xil tezlikda tarqaluvchi ikkita mustaqil to‘lqin superpozitsiyasidir.Agar torning ikkala uchi mahkamlangan bo‘lsa, chegaraviy shartlar natijasida **stasionar to‘lqinlar**, ya’ni doimiy shaklga ega bo‘lgan tebranishlar hosil bo‘ladi:

$$u(x,t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(\omega t)$$

Bu ko‘rinish musiqa asboblaridagi notalarning hosil bo‘lish jarayonini aniq tasvirlaydi.

To‘lqin tenglamasining fizik modellar bilan bog‘liqligi

1. Mexanik to‘lqinlar

Elastik torlar, membranalar va prujinali muhitlardagi tebranishlar to‘lqin tenglamasining eng sodda modellarini beradi. Masalan, gitara torining tebranishi uning uzunligi, tarangligi va zichligiga bog‘liq holda turli harmonik modlarni hosil qiladi.

2. Akustik to‘lqinlar

Havodagi tovush tarqalishi bosimning tebranishi orqali amalga oshadi. Tovush to‘lqinlari uchun tenglama uch o‘lchamli ko‘rinishda ifodalanadi:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)$$

Bu model akustika xonalarini loyihalashdan tortib mikrofon va karnaylarning ishlashigacha bo‘lgan jarayonlarda muhim ahamiyatga ega.

3. Elektromagnit to‘lqinlar

Makswell tenglamalaridan kelib chiqqan elektromagnit to‘lqinlar tenglamasi yorug‘lik, radio, Wi-Fi va boshqa aloqa texnologiyalarining nazariy asosini tashkil qiladi:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 E$$

Bu yerda E — elektromagnit maydon kuchlanishi. Elektromagnit to‘lqinlar vakuumda eng yuqori tezlik — yorug‘lik tezligida tarqaladi.

4. Suv yuzasidagi to‘lqinlar

Suv to‘lqinlari og‘irlik kuchi va sirt tarangligi ta’sirida hosil bo‘ladi. Ularning matematik modeli murakkab differensial tenglamalar orqali ifodalanadi. Bunday modellar gidravlik tizimlar, suv omborlari va port infratuzilmasi loyihalarida keng qo‘llanadi.

5. Seysmik to‘lqinlar

Yer qobig‘idagi zilzila natijasida paydo bo‘ladigan to‘lqinlar geofizikada to‘lqin tenglamasining uch o‘lchamli elastik modeli yordamida tadqiq qilinadi. Bu jarayonlar yordamida Yerning ichki tuzilishi, qatlam zichligi va seysmik faollik darajasi aniqlanadi.

Sonli yechimlar va zamonaviy hisoblash usullari

Analitik yechim faqat ideal holatlar uchun qo‘llanilishi mumkin. Real tizimlar murakkab bo‘lgani uchun sonli metodlar, xususan

-sonli differensiallash usuli (Finite Difference Method, FDM)

-chegaraviy elementlar usuli (FEM)

-spektral metodlar

keng qo‘llanadi. Bu usullar yordamida inshootlarning seysmik xavfsizligini baholash, elektromagnit antennalarni loyihalash va akustik tizimlarni optimallashtirish mumkin.

XULOSA

To‘lqin tenglamasi tabiatdagi eng muhim jarayonlarni tasvirlovchi fundamental matematik model hisoblanadi. U elastik torlardan tortib elektromagnit maydonlargacha bo‘lgan turli fizik hodisalarning umumiy qonuniyatlarini tushunishga imkon beradi. To‘lqin tenglamasining universalligi uning ko‘plab ilmiy va texnik sohalarda qo‘llanilishiga sabab bo‘lgan. d’Alembert yechimi, stasionar to‘lqinlar va sonli modellashtirish usullari yordamida to‘lqin jarayonlari chuqur tahlil qilinadi hamda ularning amaliy qo‘llanilishi yanada aniqroq tushuniladi.Zamonaviy texnologiyalar — radioaloqa, sensor tizimlar, akustik injiniring, seysmik monitoring, optik aloqa tarmoqlari — barchasi to‘lqin tenglamasining matematik asoslariga tayangan holda ishlab chiqilgan. Shu boisdan ushbu tenglama nafaqat nazariy matematikaning, balki amaliy fan va muhandislikning ham ajralmas tarkibiy qismidir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR.

1. Differensial tenglamalarning sifat nazariyasi va uning tatbiqlari, X.R. Latipov (Toshkent, 2002) — differensial tenglamalarning sifat nazariyasi haqida.
2. Oddiy differensial tenglamalar, N. Dilmuradov (Toshkent, “Sano-standart”, 2019) — oddiy differensial tenglamalar, nazariyasi va masalalari.
3. Differensial tenglamalar kursidan misol va masalalar yechish, R. Turgunbayev, Sh. Ismailov, O. Abdullayev (Toshkent, 2007) — differensial tenglamalar bo‘yicha misollar to‘plami.
4. Oddiy differensial tenglamalar (darslik), N. Dilmuradov (Toshkent, “Sano-standart”, 2019) — darslik shaklida.
5. Khalil, H. K., & Grizzle, J. W. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice Hall.
6. Ibragimov, N. H. (1999). *Elementary Lie Group Analysis and Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons.