A – ANALITIK FUNKSIYALARNING UMUMLASHMASINI OPERATORLAR YORDAMIDA KIRITILISHI

Sh.O. Xolbekov
Qarshi Muhandislik –iqtisodiyot institutining "Oliy matematika" kafedrasi o'qituvchisi,
N.R. Omonova
Qarshi Muhandislik –iqtisodiyot institutining "Oliy matematika" kafedrasi o'qituvchisi

ANNOTATSIYA

Mazkur maqolani tahlil qilish jarayonida A-analitik funksiya tushunchasini operatorlar yordamida kiritilishi to'g'risidagi yondashuvlar ochib berildi. Hozirgi zamon yangi ta'lim tizimi mazmunida o'quv reja, darsliklar asosida o'quv jarayonini loyihalashtirishga ham yangicha yondoshish va tashkil etish zaruriyai tug'ilmoqda.

Kalit so'zlar: *A-analitik funksiya, umumlashma, Koshi integral formulasi va Koshi integral teoremasi.*

АННОТАЦИЯ

В ходе анализа данной статьи были выявлены подходы к введению понятия A-аналитической функции с помощью операторов. В условиях новой системы образования возникает потребность в новом подходе и организации проектирования учебного процесса на основе учебной программы и учебников.

Ключевые слова: *A-аналитическая функция, обобщение, интегральная формула Коши и интегральная теорема Коши.*

ABSTRACT

In the course of the analysis of this article, approaches to introducing the concept of an A-analytic function with the help of operators were identified. Under the conditions of the new education system, there is a need for a new approach and organization of the design of the educational process based on the curriculum and textbooks.

Keywords: *A-analytic function, generalization, Cauchy integral formula and Cauchy integral theorem.*

KIRISH

Bugungi kunga kelib, oliy ta'lim muasasalarida ta'lim va tarbiya jarayonlarini tashkiliy - huquqiy asoslarini o'rganish va tahlil etish o'ta dolzarb vazifalardan biri hisoblanadi. Ta'lim va tarbiya zimmasiga qo'yilayotgan ulkan vazifalar ta'lim

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

berishga munosabatni, yondoshuvni o'zgartirishni taqozo etmoqda. Shu munosabat va yondashuvni o'ziga mujassam etishi lozim bo'lgan yangi pedagogik texnologiya bo'yicha bir qancha maqsadlar e'lon qilindi. Biroq hozirdagi islohotlar jadalligi mavjud nazariyani tezroq amaliyotga tatbiq etishni talab etadi. Shu sababli ham birinchi navbatda ta'lim mazmuni va uning tarkibini kengaytirish va chuqurlashtirish, xususan, bu mazmunga nafaqat bilim, ko'nikma va malaka, balki umuminsoniy madaniyatni tashkil qiluvchi ijodiy faoliyat tajribasi, tevarak-atrofga munosabatlarni ham kiritish g'oyasi kun tartibiga ko'ndalang qilib qo'yilgan.

Jamiyatning kelajagi uning ajralmas qismi va hayotiy zarurati bo'lgan ta'lim tizimining qay darajada rivojlanganligi bilan belgilanadi. Bugungi kunda mustaqil taraqqiyot yo'lidan borayotgan mamlakatimizning uzluksiz ta'lim tizimini isloh qilish va takomillashtirish, yangi sifat bosqichiga ko'tarish, unga ilg'or pedagogik va axborot texnologiyalarini joriy qilish hamda ta'lim samaradorligini oshirish davlat siyosati darajasiga ko'tarilgan. O'zbekiston Respublikasida "Ta'lim to'g'risida"gi qonun va "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" ning qabul qilinishi bilan uzluksiz ta'lim tizimi orqali zamonaviy kadrlar tayyorlashning asosi ishlab chiqildi.

MUHOKAMA VA NATIJALAR

Ushbu ish hozirda kompleks analizda yangi $A-$ analitik funksiyalar,

$A-$ analitik funksiyalarning umumlashmasi bo'lgan A(z)-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integrallarni keltirib chiqarishga bag'ishlangan. $A-$ analitik funksiyalar va A(z)-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integrallarni keltirib chiqarishni o'rganish kompleks analizning masalalari uchun muhim ahamiyatga ega bo'lishi bilan birgalikda, nazariy mexanika, seysmik hisob usullari va dinamika masalalariga tadbiq etilishi bu mavzuni o'rganish dolzarb ekanligini yaqqol namoyon etadi.

Ushbu ishda assosan analitik funksiya tushunchasi va uning xossalari, analitik funksiya uchun Koshi integral formulasi va Koshi integral teoremasi, Koshi tipidagi integral o'rganildi va ulardan foydalanib A(z)-analitik funksiyaning ta'rifi hamda A-analitik funksiya tushunchasi operatorlar yordamida kiritilishi *o'rganildi.*

Keltirilgan tushunchalar asosida A-analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning analogini hosil qilish o'rganildi.

Faraz qilaylikki bizga, X va Y chiziqli normalangan fazolar berilgan bo'lsin.

Ta'rif 1. X fazodan olingan har bir x elementga Y fazoning yagona y elementini mos qoyuvchi $Ax = y$ akslantirish operator deyiladi.

$D(A)=\{x\in X: Ax \quad mavjud \quad va \quad Ax\in Y\}$ ga A operatorning aniqlanish sohasi deyiladi.

Ta'rif 2. Agar ixtiyoriy $x, y\in D(A)\subset X$ elementlar va ixtiyoriy $\alpha,\beta\in C$ sonlar uchun $A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$ tenglik o'rinli bo'lsa, A operatorga chiziqli deyiladi.

Ta'rif 3. Bizga $A: X\to Y$ operator va $x_0\in D(A)$ nuqta berilgan bo'lsin. Agar $y_0=Ax_0\in Y$ ning ixtiyoriy V atrofi uchun, x_0 nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in U\cap D(A)$ lar uchun $Ax\in V$ bo'lsa, A operator $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif 4. Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ mavjud bo'lib, $\|x-x_0\|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in D(A)$ lar uchun $\|A(x)-A(x_0)\|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, A operator $x=x_0$ nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif 5. Agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy x_n ketma-ketlik uchun $\|Ax_n-Ax_0\|\to 0$ bo'lsa, u holda A operator x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif 6. $Ax=\theta$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $x\in X$ lar to'plami A operatorning yadrosi deyiladi va u $K\text{er}\,A$ deb belgilanadi.

Ta'rif 7. Biror $x\in D(A)$ uchun $y=Ax$ bajariladigan $y\in Y$ lar to'plami A operatorning qiymatlar sohasi yoki tasviri deyiladi va $\mathrm{Im}\,A$ yoki $R(A)$ bilan belgilanadi.

$K\text{er}\,A=\{x\in D(A): \quad Ax=\theta\}$,

$R(A): =\mathrm{Im}\,A=\{y\in Y: \quad biror \quad x\in D(A) \quad uchun \quad y=Ax\}$.

Ta'rif 8. X fazoni Y fazoga akslantiruvchi A chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar A ning aniqlanish sohasi $D(A)=X$ bo'lib, har qanday chegaralangan to'plamni yana chegaralangan to'plamga akslantirsa, A ga chegaralangan operator deyiladi.

Ta'rif 9. $A: X\to Y$ chiziqli operator bo'lsin. Agar shunday $C>0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x\in D(A)$ uchun $\|Ax\|\le C\cdot\|x\|$ tengsizlik bajarilsa, A chegaralangan operator deyiladi.

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

Ta'rif 10. $\|Ax\| \le C \cdot \|x\|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi C sonlar to'plamining aniq quyi chegarasi A operatorning normasi deyiladi va u $\|A\|$ bilan belgilanadi, ya'ni $\|A\| = \inf C$.

Bu ta'rifdan ixtiyoriy $x \in D(A)$ uchun $\|Ax\| \le \|A\| \cdot \|x\|$ tengsizlik o'rinli ekanligini kelib chiqadi.

Misollar.

1. $C[-1,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$B : C[-1,1] \to C[-1,1], \quad (Bf)(x) = xf(x) \tag{1}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriliadi. Uzluksiz funksiyalarning ko'paytmasi uzluksiz ekanligidan B operatorning aniqlanish sohasi $D(B) = C[-1,1]$ ekanligi kelib chiqadi. Endi B operatorni chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz.

$$\|Bf\| = \max_{-1\le x\le 1} |xf(x)| \le \max_{-1\le x\le 1} |x| \cdot \max_{-1\le x\le 1} |f(x)| = 1 \cdot \|f\|.$$

Bundan B operatorning chegaralanganligi va $\|B\| \le 1$ kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan, agar $f_0(x) = 1$ desak u holda

$$(Bf_0)(x) = x, \quad \|Bf_0\| = 1, \quad \|B\| \ge \frac{\|Bf_0\|}{\|f_0\|} = 1$$

ni olamiz. Yuqoridagilardan $\|B\| = 1$ kelib chiqadi.

2. Endi ℓ_2 fazoda ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$A : \ell_2 \to \ell_2, \quad (Ax)_n = a_n x_n, \quad \sup_{n\ge 1} |a_n| = a < \infty \tag{2}$$

operatorni qaraymiz. Uning chegaralangan ekanligini ko'rsatib, normasini toping.

Yechish. Ixtiyoriy $x \in \ell_2$ uchun $Ax \in \ell_2$ ekanligini ko'rsatamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(Ax)_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n|^2 \le \sup_{n\ge 1} |a_n|^2 \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = a^2 \|x\|^2. \tag{3}$$

Bu munosabatlardan $D(A) = \ell_2$ ekanini olamiz.Endi uni chiziqli ekanligini ko'rsatamiz. A operatorni aniqlanishiga ko'ra

$$(A(\alpha x + \beta y))_n = a_n(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha a_n x_n + \beta a_n y_n = \alpha (Ax)_n + \beta (Ay)_n.$$

Demak, A chiziqli operator ekan. Uning chegaralangan ekanligi (3) tengsizlikdan kelib chiqadi. Bundan tashqari (3) tengsizlikdan $\|A\| \leq a$ ekanligi ham kelib chiqadi. A operatorning normasi $\|A\| = a$ ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun ℓ_2 fazoda $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemani olamiz. A operatorning aniqlanishiga ko'ra, $\forall n \in N$ uchun $Ae_n = a_n e_n$ tenglik o'rinli. $\|A\| \geq \|Ae_n\| = \|a_n e_n\| = |a_n| \cdot \|e_n\| = |a_n|$ munosabaydan kelib chiqadi. Bu tengsizlik $\forall n \in N$ da o'rinli bo'lgani uchun $\|A\| \geq \sup\limits_{n\geq 1} |a_n| = a$ ni olamiz. Demak, $\|A\| = a$ tenglik isbotlandi.

Ta'rif 11. Agar $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligi uchun shunday $A \in L(X,Y)$ operator mavjud bo'lib, $\|A_n - A\| \to 0$, $n \to \infty$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga norma boyicha yoki tekis yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{u} A$ shaklda belgilanadi.

Ta'rif 12. Agar ixtiyoriy $x \in X$ uchun $\|A_n x - Ax\| \to 0$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga *kuchli* yoki nuqtali yaqinlashadi deyiladi va $A_n \xrightarrow{s} A$ shaklda belgilanadi.

Ta'rif 13. Agar ixtiyoriy $f \in Y^*$ va ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(A_n x) \to f(Ax)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga *kuchsiz* yoki kuchsiz ma'noda yaqinlashadi deyiladi.

Ta'rif 14 Agar ixtiyoriy $x, y \in H$ uchun $(A_n x, y) \to (Ax, y)$ bo'lsa, $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga *kuchsiz* yaqinlashuvchi deyiladi.

Lemma 1. Agar $\{A_n\} \subset L(X,Y)$ operatorlar ketma-ketligi biror $A \in L(X,Y)$ operatorga tekis yaqinlashsa, u holda $\{A_n\}$ operatorlar ketma-ketligi A operatorga ham kuchli ma'noda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Teorema 1. Agar Y fazo to'la bo'lsa, u holda $L(X,Y)$ fazo ham to'la, ya'ni Banax fazosi bo'ladi.

Bizga $A: X \to Y$ operator berilgan bo'lsin. $D(A)$ – uning aniqlanish sohasi, $\operatorname{Im} A$ esa uning qiymatlar sohasi bo'lsin.

Ta'rif 15. Agar ixtiyoriy $y \in \operatorname{Im} A$ uchun $Ax = y$ tenglama yagona yechimga ega bo'lsa, u holda A teskarilanuvchan operator deyiladi.

$A: Y \to X$, $D(A^{-1}) = \operatorname{Im} A$, $\operatorname{Im} A^{-1} = D(A)$. Bundan tashqari teskari operatorning aniqlanishidan

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

$$A^{-1}Ax = x, \quad x \in D(A), \quad AA^{-1}y = y, \quad y \in D(A^{-1}) \quad (1)$$

tengliklar kelib chiqadi.

Teorema 1. A chiziqli operatorga teskari bo'lgan A^{-1} operator ham chiziqlidir.

Teorema 2. $A: X \to Y$ chiziqli operator teskarilanuvchan bo'lishi uchun $Ax = \theta$ tenglama faqat $x = \theta$ yechimga ega bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema 3. X chiziqli normalangan fazoni Y chiziqli normalangan fazoga akslantiruvchi chiziqli A operator berilgan bo'lsin. $\operatorname{Im} A$ da chegaralangan A^{-1} operator mavjud bo'lishi uchun, shunday $m > 0$ son mavjud bo'lib, ixtiyoriy $x \in D(A)$ lar uchun $\|Ax\| \geq m\|x\|$ (4)

tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

Misol 1. $C[0,1]$ fazoda x ga ko'paytirish operatorini, ya'ni

$$B: C[0,1] \to C[0,1], \quad (Bf)(x) = xf(x)$$

operatorni qaraymiz. Bu operator teskarilanuvchan operator bo'ladimi?

Yechish. B operatorning chiziqli ekanligi oson tekshiriladi. Endi $Bf = 0$ tenglamani, ya'ni $xf(x) = 0$ tenglamani qaraymiz.Bu tenglama $C[0,1]$ da faqat $f(x) \equiv 0$ yechimga ega. B operator 2-teoremani shartlarini qanoatlantiradi. Demak, B teskarilanuvchan operator, ya'ni B ga teskari operator mavjud.

Teorema 4. X – Banax fazosi va $A \in L(X)$. Agar $\|A\| \leq q < 1$ bo'lsa, u holda $I - A$ operator uchun chegaralangan teskari operator mavjud.

Misol 2. Parameter λ ning $\lambda \in \left(-\frac{1}{\pi}; \frac{1}{\pi}\right)$ qiymatlarida

$$(I - \lambda A) f(x) = f(x) - \lambda \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y f(y) dy, \quad f \in L_2[-\pi, \pi]$$

operatorga 4-teoremani qo'llab, unga teskari operatorni toping.

Yechish. 4-teoremani qo'llashimiz uchun A operatorning darajalarini hisoblashimiz kerak. Dastlab A operatorni kvadratini hisoblaymiz:

$$(A^2 f)(x) = A\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin y f(y) dy\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos x \sin t \left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin y f(y) dy\right) dt. \quad (6)$$

(6) tenglikni t bo'yicha integralini hisoblash mumkin. Agar biz $\int_{-\pi}^{\pi} \cos t \sin t dt = 0$ tenglikni hisobga olsak, $A^2 = 0$ ga ega bo'lamiz. Bu tenglikdan barcha $n \geq 2$ larda $A^n = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Natijada biz, $S = I + \lambda A = (I - \lambda A)^{-1}$ ga ega bo'lamiz. Haqiqatan ham,

$$(I - \lambda A)(I + \lambda A) = I + \lambda A - \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$
$$(I + \lambda A)(I - \lambda A) = I - \lambda A + \lambda A - \lambda^2 A^2 = I$$

tenglik o'rinli. Demak, barcha $\lambda \in R$ larda $I - \lambda A$ operatorga teskari operator mavjud va chegaralangan bo'ladi.

Faraz qilaylik $A : C^n \to C^n$ chiziqli operator berilgan bo'lsin. Agar biror λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas $x \in C^n$ yechimga ega bo'lsa, u holda λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, unga mos keluvchi nolmas x yechim esa vektor deyiladi. Chekli o'lchamli fazolarda chiziqli operatorning xos qiymatlari to'plami uning spektri deb ataladi. Agar $\lambda \in C$ son A operator uchun xos qiymat bo'lmasa, u operatorning regulyar nuqtasi deyiladi. Umuman olganda chekli o'lchamli fazolarda spektr tushunchasi kam ishlatiladi.

Agar A operator cheksiz o'lchamli X fazoda berilgan bo'lsa, u holda 3 ta holat bo'ladi, ya'ni:

1) λ son uchun $Ax = \lambda x$ tenglama nolmas yechimga ega, ya'ni λ son A operator uchun xos qiymat, bu holda $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud emas;

2) λ son uchun C^n fazoning hamma yerida aniqlangan $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud va demak, chegaralangan;

3) $(A - \lambda I)^{-1}$ operator mavjud, ya'ni $Ax = \lambda x$ tenglama nol yechimga ega, $(A - \lambda I)^{-1}$ operator X fazoning hamma yerida aniqlanmagan yoki $\overline{\operatorname{Im}(A - \lambda I)} \neq X$.

Ta'rif 16. Agar $\lambda \in C$ son uchun $A - \lambda I$ ga teskari operator mavjud bo'lib, u X ning hamma yerida aniqlangan bo'lsa, λ son A operatorning regulyar nuqtasi deyiladi, $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ operator esa A operatorning λ nuqtadagi rezolventasi deyiladi. Barcha regulyar nuqtala to'plami $\rho(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif 17. A operatorning regulyar bo'lmagan barcha nuqtalari to'plami A operatorning spektri deyiladi va u $\sigma(A)$ orqali belgilanadi.

Ta'rif 18. Agar biror $\lambda \in C$ son uchun $(A - \lambda I)x = 0$ tenglama nolmas $(x \neq 0)$ yechimga ega bo'lsa, λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, nolmas yechim x esa xos vektor deyiladi.

Ko'rinib turibdiki, barcha xos qiymatlar to'plami spektrda yotadi, chunki λ xos qiymat bo'lsa, $A-\lambda I$ operatorning teskarisi mavjud emas.

Spektr quyidagi qismlarga ajratiladi.

Ta'rif 19. Barcha xos qiymatlar to'plami A operatorning nuqtali spektri deyiladi va $\sigma_{pp}(A)$ bilan belgilanadi.

b) Agar λ xos qiymat bo'lmasa va $\overline{\operatorname{Im}(A-\lambda I)} \neq X$, ya'ni $A-\lambda I$ operatorning qiymatlar sohasi X ning hamma yerida zich emas. Bunday λ lar to'plami A operatorning qoldiq spektri deyiladi va $\sigma_{qol}(A)$ bilan belgilanadi.

XULOSA

A-analitik funksiyalar nazariyasi zamonaviy matematikaning bugungi kunda jadallik bilan rivojlanib borayotgan sohalaridan biri bo'lib, ushbu sohada olingan natijalar ko'plab amaliy masalalarni yechishda muhim ahamiyatga ega bo'lishi bilan birgalikda, kvazikonform akslantirishlar nazariyasi, kompleks dinamik sistemalar bilan bevosita bog'langan. Bu esa ushbu ishda o'rganilgan mavzuning dolzarb ekanligini ko'rsatadi.

REFERENCES

1. Саъдуллаев А.*"Теория плюрипотенциала. Применения"*, часть 1,часть 2, "PalmariumAcademicPublishing" 2012г.
2. Xudoyberganov G., Varisov A., Mansurov H.,*Kompleks analiz,* T. "Universitet", 1998y.
3. Жабборов Н.М., Имомназаров Х.Х.,*Некоторые начально-краевые задачи механики двухскоростных сред,* Т. «Университет», 2012 г. 212 с.
4. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.,*Теорема Коши для* $A(z)$ *-аналитических функций,*Узбекский математический журнал, 2014 г., №1, стр. 15-18.
5. Жабборов Н.М., Отабоев Т.У.,*Аналог интегральной формулы Коши для А-аналитических функций,*Узбекский математический журнал, (нашрда).
6. Шабат Б.В.,*Введение в комплексный анализ,*часть 1, М., "Наука", 1985г.
7. W.K. Hayman and P.B. Kennedy,*"Subharmonic functions",* Academik Press, 1976y.
8. Maciej Klimek,*"Pluripotential theory",* Oxford science publications, 1991y.
9. Секефальви-Надь Б, Фояш Ч. Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1970.
10. Лаврентьев М.М, Савельев Л.Я. «Линейные операторы и некорректные задачи»-М.Наука,1992г.

11. Arbuzov E.V, Bukhgeim A.L. ‘Carleman’s formulas for A-analytic functions in a half-plane’// J.Inv.III-Posed Problems, 1997, v. 5, N.6, pp.491-505.
12. Садуллаев А.С**.** *Кўп аргуменли голоморф функциялар. Ургенч – 2004*
13. Люстерник Л.А., Соболев.В.И. “Элементы функционального анализа” Москва 1965.
14. Криллов А.А., Гвишиани.А.Д. “Теоремы и задачи функционального анализа” Москва 1988.
15. Треногин. Соболев.В.И “ Задачи и упражнения по функциональному анализу” Москва 1973.
16. Колмогоров А. М., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционалъного анализа. – М., Наука, 1976.