ПРИМЕНЕНИЕ БЕТА И ГАММА ФУНКЦИЕЙ К ВЫЧИСЛЕНИЮ НЕКОТОРЫХ ВАЖНЫХ В ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧАХ

Абдирасулов Х.,
Ачилов.И.А,
Холбеков Ш.О.
учители КарИЭИ

АННОТАЦИЯ

В ходе данного исследования обсуждались такие логические операции, как практическое применение Бета- и Гамма-функций и непрерывного вывода, связь между Гамма- и Бета-функциями.

Ключевые слова: *внутренние интегралы, гамма функция,обратные интегралы I-го типа, непрерывное, непрерывное произведение,бета функция, обратные интегралы II-го типа,связь между гамма- и-бета функциями и др.*

ABSTRACT

In the course of this research, logical operations such as practical application of Beta and Gamma functions and continuous derivation, connection between gamma and beta functions were discussed.

Keywords: *inner integrals,gamma function,type I-inverse integrals,connection , connection poduct,beta function,type II inverse integrals,connection between gamma and beta functions, etc.*

ANNOTATSIYA

Mazkur tadqiqot jarayonida Beta va Gamma funksiyalarini amaliy qo'llash va uzluksiz hosilaga egaligi, gamma va beta funksiyalari orasidagi bog'lanish kabi mantiqiy amallarga to'xtalib o'tildi.

Kalit so'zlar: *ichki integrallar, gamma funksiya, I turdagi teskari integrallar, uzluksiz, uzluksiz ko'paytma, beta funksiya, II turdagi teskari integrallar, gamma va beta funksiyalar orasidagi bog'lanish va h.k.*

ВВЕДЕНИЕ

I. Гамма функция. Гамма функцией (или интегралом Эйлера второго рода) называется интеграл вида ту

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx \qquad (1).$$

Интеграл (1) – функция параметра p – является несобственным, так как верхний предел равен бесконечности и, кроме того, потому что при $x\to 0$ и

$p<1$ подынтегральная функция неограниченно возрастает. Интеграл (1) сходится при $p>0$ и расходится $p<0$. Гамма функция является одной из важнейших функций для анализа и его приложений.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Основные свойства гамма функции:

1^0. Функция $\Gamma(p)$ непрерывна и имеет непрерывную производную $\Gamma'(p)$ для $p>0$.

2^0. Имеет место равенство $\Gamma(p+1)=p\Gamma(p)$ (2).

3^0. После n-кратного применения формулы (2) получается соотношение

$$\Gamma(p+n)=(p+n-1)(p+n-2)\cdots(p+1)p\Gamma(p) \qquad (3).$$

4^0. Если в формуле (3) положит $p=1$ и принять во внимание, что $\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=1$, то получается равенство $\Gamma(n+1)=n!$ (4), если $n=0$, то $0!=\Gamma(1)=1$.

5^0. Из формулы (2) следует, что если $p\to 0$, то $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}\to+\infty$, т.е. $\Gamma(0)=+\infty$.

6^0. При $p=-n$ из формулы (2) следует, что $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$, т.е. $\Gamma(-n)=(-1)^n\cdot\infty$ (n=1,2,3,…).

7^0. Так как $\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+1)}{p}$, то $\Gamma(p+1)$ имеет смысл при $-1<p<0$.

Если, $-n<p<-(n-1)$, то из формулы (3) следует, что

$$\Gamma(p)=\frac{\Gamma(p+n)}{p(p+1)(p+2)\cdots(p+n-1)}$$

С помощью подстановки $p+n=\alpha$, откуда $p=-n+\alpha$, последняя формула преобразуется к виду

$$\Gamma(\alpha-n)=\frac{(-1)^n\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)} \qquad (5)$$

и для $-n<p<-(n-1)$ знак $\Gamma(p)$ определяется множителем $(-1)^n$.

8^0. Используется формулу (2), можно получить значения $\Gamma(p)$ для полуцелого аргумента:

$$\Gamma(m+\frac{1}{2})=\frac{(2m-1)!!}{2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{(2m)!}{m!\cdot 2^m}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (6).$$

9^0. Имеет место формула дополнения

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad (0<p<1) \qquad (7).$$

Если в этой формуле положить $p=\frac{1}{2}$, то

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi, \text{ т.е. } \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

пользуясь основными свойствами, можно вычислить $\Gamma(p)$ для любого p.

II. Бета-функция. Бета функцией (или интегралом Эйлера первого рода) называется интеграл

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx \qquad (8)$$

интеграл (8) есть функция двух параметров p и q, сходящейся при $p>0$, $q>0$.

Функция В является симметричной относительно параметров, т.е. $\mathrm{B}(p,q)=\mathrm{B}(q,p)$.

Если сделать замену переменной интегрирования, пологая $x=\sin^2 t,\ \ dx=2\sin t\cos t dt,\ \ 0<t<\frac{\pi}{2}$, то формула (8) примет вид

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2p-1}t\cos^{2q-1}dt \text{ или}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n xdx=\frac{1}{2}\mathrm{B}\left(\frac{m+1}{2},\frac{n+1}{2}\right),\ (m>0,n>0) \qquad (9)$$

К интегралом (8) и (9) приводится многие интегралы, встречающиеся в прикладных задачах.

Для вычисления значений бета функции пользуются следующей зависимостью между бета и гамма функцией:

$$\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad (10).$$

Если $q=1-p$, то $\mathrm{B}(p,1-p)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(1-p)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin p\pi}\quad (0<p<1)$

используя бета функцию, легко найти значение $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, пусть $p=q=\frac{1}{2}$, тогда $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(1)}$. Так как $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=B\left(\frac{1}{2},1-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}=\pi$, а $\Gamma(1)=1$, то $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$.

III. В этой части статье приводится некоторые применению Бета- и Гамма функцией, встречающиеся в прикладных задачах.

III. Связь между функциями бета и гамма.

1. Пусть $\Gamma(x)=\int_0^{00} t^{x-1}e^{-t}dt$ - гамма-функция, $B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ -бета функция.

Доказать, что $\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}=B(x,y)$ (1).

Доказательство имеем $\Gamma(x)\Gamma(x)=\int_0^\infty\int_0^\infty t^{x-1}\tau^{y-1}e^{-t-y}dtd\tau$.

Сделаем замену переменных $t=u(1-v),\ \tau=u\cdot v$ якобиан данного преобразованные $\frac{D(t,\tau)}{D(u,v)}=u>0$. Далее, $t+\tau=u$ $(0<u<\infty)$, $V=\frac{\tau}{t+\tau}$ $(0<v<1)$.

По этому $\Gamma(x)\Gamma(y)=\int_0^\infty\int_0^1 u^{x-1}(1-v)^{y-1}v^{y-1}u^{y-1}e^{-u}udndv=\int_0^\infty u^{x+y-1}e^{-u}du\int_0^1 v^{y-1}(1-v)^{x-1}dv=$
$=\Gamma(x+y)B(y,x)=\Gamma(x+y)B(x,y)$.

2. Доказать, что $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)}{2^n}\cdot\sqrt{\pi}$ Доказательство. Для гамма функции мы установили соотношение $\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x)$.

Применяя это равенство, получаем $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(n-\frac{1}{2}+1\right)=\left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right)=$

$$=\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{3}{2}\right)=\ldots=\left(n-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\frac{3}{2}\right)\ldots\left(n-\frac{2n-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

Далее $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}}e^{-t}dt=(t=u^2)=\int_0^\infty 2e^{-u^2}du=2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\sqrt{\pi}$.

3. Найти площадь S фигуры, ограниченной кривой C:

$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n=1$ $(a>0,\ b>0,\ n>0)$ и осями координат.

Решение. Легко видеть, что $x=a\cos^{2|n}\varphi,\ y=b\sin^{2|n}\varphi$ $(0<\varphi<2\pi)$ -есть параметрические уравнения кривой C.

По этому $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma}(xdy-ydx)$, где Г- контур, состоящий из кривой с и отрезков осей координат.

Далее $S=\frac{1}{2}\int\limits_{C}(xdy-ydx)+\frac{1}{2}\int\limits_{b}^{0}(0,dy+y\cdot 0)+\frac{1}{2}\int\limits_{d}^{a}(x\cdot 0-0\cdot dx)=\frac{1}{2}\int\limits_{c}(xdy-ydx)=$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(2\cdot\frac{ab}{n}\cdot\cos^{\frac{2}{n}+1}\varphi\cdot\sin^{\frac{2}{n}-1}\varphi+\frac{2ab}{n}\cdot\sin^{\frac{2}{n}+1}\cos^{\frac{2}{n}-1}\varphi\right)d\varphi=\frac{ab}{n}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi\cdot\sin\varphi)^{\frac{2}{n}-1}d\varphi .$$

Сделаем замену переменного: $\sin\varphi=z, d\varphi=\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ тогда

$$S=\frac{ab}{n}\int\limits_{0}^{1}z^{\frac{2}{n}-1}\left(1-z^2\right)^{\frac{1}{n}-1}dz=\left(z^2=t\right)=\frac{ab}{2n}\int\limits_{0}^{1}t^{\frac{1}{n}-1}(1-t)^{\frac{1}{n}-1}dt=\frac{ab}{2n}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

(см. задачи 1 и 2).

4. Определить площадь S фигуры ограниченной кривой $r^4=\sin^3\theta\cos\theta$.

Решение. Кривая имеет две петли в одну и в три четверти; достаточно удвоить площадь одной из них. По формуле для площади в полярных координатах имеем:

$$S=2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{3}{2}}\theta\cos^{\frac{1}{2}}\theta d\theta=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{5}{2}-1}\varphi\cos^{\frac{3}{2}-1}\varphi d\varphi=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{2\Gamma(2)}=\frac{1}{8}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{3}\pi .$$

Чтобы вычислить интеграл, так что, используя следующую формулу, будем иметь

$$\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi=\frac{1}{2}B\left(\frac{a}{2},\frac{b}{2}\right)=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)}$$

5. а) Определить площадь S фигуры, ограниченной одним витком кривой $r^m=a^m\cos m\theta$ (m – натуральное число) и б) длину l этого витка.

Решение.

а) $$S=2\cdot\frac{a^2}{2}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2m}}\cos^{\frac{2}{m}}m\theta d\theta=\frac{a^2}{m}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{\frac{2}{m}}\varphi d\varphi=\frac{a^2}{m}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)}=\frac{\pi a^2}{\sqrt[m]{4}}\frac{\Gamma\left(\frac{2}{m}\right)}{\left(\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)\right)^2}.$$

б) По формуле для длины дуги в полярных координатах

$$l = 2a\int_0^{\frac{\pi}{2m}} \cos^{\frac{1}{m}-1} m\theta d\theta = \frac{2a}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{\frac{1}{m}-1} \varphi d\varphi = \frac{a}{m}\cdot 2^{\frac{1}{m}-1}\cdot\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{2m}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{m}\right)}.$$

6. Вычислить интеграл $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}}$

Решение. Положим $\cos\theta = 1-2\sqrt{\pi}$, тогда $d\theta = \frac{du}{2\sqrt[4]{u^3}\sqrt{1-\sqrt{u}}}$,

$\sqrt{3-\cos\theta} = \sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{u}}$, причем, $0 \le u \le 1$. Тогда получим

$$\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{\sqrt{3-\cos\theta}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 u^{-\frac{3}{4}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}.$$

Так как $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi$. Ответь $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right)^2$.

7. Показать, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{\pi}{\cos n\pi}$.

Решение. Пологая в формуле $\Gamma(n)\Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}$ $(0<n<1)$; $n = \omega + \frac{1}{2}$, получим $\Gamma\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\left(\omega+\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\omega\pi\right)}$, или $\Gamma\left(\frac{1}{2}+\omega\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\omega\right) = \frac{\pi}{\cos\omega\pi}$.

8. Вычислить интеграл $\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-\sqrt[5]{t^2}}}$.

Решение. Перепишем данный интеграл в виде $\int_0^1\left(1-\sqrt[5]{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}}dt$. Воспользуемся подстановкой $t^{\frac{2}{5}} = u,\ t = u^{\frac{5}{2}}$, $dt = \frac{5}{2}u^{\frac{3}{2}}du$ и, следовательно

$$\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{1-\sqrt[5]{t^2}}} = \frac{5}{2}\int_0^1 u^{\frac{3}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}du = \frac{5}{2}B\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{15\pi}{16}.$$

9. Вычислить интеграл $\int_0^1 x^{p-1}\left(1-x^m\right)^{q-1}dx \quad (p,q,m>0)$.

Решение. С помощью подстановки $x^m = y,\ 0 < y < 1$, $x = \sqrt[m]{y},\ dx = \frac{1}{m} y^{m-1} dy$ предложенный интеграл приводится к виду

$$\int_0^1 y^{\frac{1}{m}(p-1)} (1-y)^{q-1} \frac{1}{m} y^{\frac{1}{m}-1} dy = \frac{1}{m}\int_0^1 y^{\frac{m}{p}-1}(1-y)^{q-1} dy = \frac{1}{m} B\left(\frac{m}{p}, q\right) = \frac{1}{m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma(q)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+p\right)}.$$

10. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(\alpha x + \beta(1-x)+\gamma)^{p+q}} dx \quad (\alpha, \beta > 0,\ \ p, q > 0)$.

Решение. С помощью подстановки

$$\frac{(\alpha+\beta)x}{(\alpha x + \beta(1-x)+\gamma)^{p+q}} = t \text{ или } \frac{(\beta+\gamma)(1-x)}{\alpha x + \beta(1-x)+\gamma} = 1-t,\ \ \frac{(\alpha+\gamma)(\beta+\gamma)dx}{(\alpha x + \beta(1-x)+\gamma)^2} = dt.$$

Предложенный интеграл приводится к виду

$$\frac{1}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt = \frac{B(p,q)}{(\alpha+\gamma)^p(\beta+\gamma)^q}.$$

11. Вычислить интегралы

а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a-1}\varphi d\varphi \quad (a > 0)$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^k \varphi d\varphi \quad (|k| < 1)$.

Решение. а) Чтобы вычислить интеграл, так что, используя следующую формулу, будем иметь

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi \cos^{b-1}\varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\Gamma\left(\frac{b}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+b}{2}\right)} \quad (a, b > 0).$$

В частности, при $b = 1$, получим отсюда $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}$.

С помощью формулы Лежандра этот результат может быть переписан в виде: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi d\varphi = 2^{a-1} \cdot \frac{\left(\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(a)} = 2^{a-2} B\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$.

12. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^k\varphi d\varphi \quad (|k|<1)$.

Решение. Наконец, пологая в $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{a-1}\varphi\cos^{b-1}\varphi d\varphi \ (a,b>0)$,

$a=1+k$ и $b=1-k$, где $|k|<1$, найдем (используя формулу дополнения)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} tg^k\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-k}{2}\right)=\frac{\pi}{2\cos\frac{k\pi}{2}}.$$

13. Если в интеграле

$$B(a,a)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{a-1}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}dx=2\int_0^1\left(\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}-x\right)^2\right)^{a-1}dx.$$

Сделать подстановку $\frac{1}{2}-x=\frac{1}{2}\sqrt{t}$, то получим

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{a-1}dx=\frac{1}{2^{2a-1}}B\left(\frac{1}{2},a\right).$$

Заменим в обоих случаях функцию B её выражением через Г:

$$\frac{\Gamma(a)\Gamma(a)}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2a-1}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(a)}{\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)}.$$

Сокращая на $\Gamma(a)$ и подставляя вместо $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ его значения $\sqrt{\pi}$ придем к формуле Лежандра:

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2a-1}}\Gamma(2a).$$

14. Найти площадь фигуры, ограниченной линией: ?;

Решение. Положим ?, тогда

Плоская фигура ограничена двумя симметричными относительно оси *ОУ* петлями; *x* и *y* обращаются в нуль одновременно при ? и стремится к нулю при ?, искомая площадь равна удвоенной, площади фигуры, ограниченной одной из упомянутых петель:

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

REFERENCES

1. Гнеденко Б.В. курс теории вероятностей. – М. Наука, 1988.
2. Боровков А.А. теория вероятностей. – М. Наука, 1976.
3. Sirojiddinov S.X., Mamatov M.M. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. – T.: O’qituvchi, 1985.