Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Research BIB / Index Copernicus
(E)ISSN: 2181-1784
4(6), June, 2024
www.oriens.uz

МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДВУКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ ПО ИНЖЕНЕРНЫМ СПЕЦИАЛЬНОСТЯМ

Хуррамов Ёдгор Сафарали ўғли
Национальный исследовательский университет
«Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства» Ассистент кафедры высшей математики
Email: yxurramov94@mail.ru

АННОТАЦИЯ

Во многих разделах математики сталкиваются с проблемами, связанными с интегралами от функций многих переменных и очевидна важность изучения вычисления и применения кратных интегралов.

В теории кратных интегралов, как и в теории определенных интегралов, существуют такие понятия, как существование интеграла, его свойства, вычисление интеграла, применение интеграла. Следует отметить, что если в определенных интегралах интервал интегрирования состоит из отрезков в Р-пространстве, то кратные интегралы интегрируются по областям соответствующего пространства. Разнообразие таких областей затрудняет изучение кратных интегралов и приводит к дифференцированию кратных интегралов. Самым простым из кратных интегралов является двойной интеграл.

В работе исследуются прикладные аспекты двойных интегралов. Известно, что задача о площади криволинейной трапеции приводит к простому определенному интегралу. Точно так же задача о площади поверхности и объеме цилиндрического тела может быть вычислена с помощью двойного интеграла по области.

Эта статья дает представление о том, как вычислить геометрические и механические задачи с помощью двойных интегралов. В работе приводятся понятия, способствующие обогащению математических знаний молодых инженеров, получивших образование в политехнической сфере, а также повышению их профессиональных знаний и навыков по специализации. Формирование математической компетентности студента важно с точки зрения достаточности математических знаний для расчета различных типов поверхностей, определения объема и плотности объектов. Приведены формулы для расчета объема объекта сложной формы.

Ключевые слова: *инженерная специальность, математическая компетентность, двукратный интеграл, область интегргирования, порядок интегрирования, механическая, геометирическая интерпретация***.***

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня, в процессе глобализации, мы видим взаимозависимость науки и общества во многих социальных и технических областях. Теории, изучаемые в фундаментальных науках, служат основой любого изобретения [1-5]. В то же время, несмотря на то, что последовательность тем дисциплины "Высшая математика" для студентов политехнического факультета составлена в соответствии с квалификационными требованими по техническим специальностям, на занятиях преподаватели зачастую ограничиваются теоретической частью преподносимой темы.

Решением такой проблемы может служить подход, когда профессор-преподаватель, преподающий математику, по мере возможности, исходя из выбранной студентом области обучения, должен поднимать насущные практические вопросы по предмету, пояснять их на лекциях и задавать по ним домашние задания для самостоятельного образования [2].

Будущий инженер-техник должен хорошо разбираться в математике. Например, тема «Специальные решения двойных интегралов» с точки зрения теоретической математики выражает расчеты поверхностей и объемов объектов различной формы, встречающихся в различных областях. Инженер, владеющий такой теорией, может добиться успехов в различных аспектах своей деятельности, например, он может освоить навыки по определению технического состояния используемого оборудования, контроля качества выпускаемой продукции и т.д. [1]

В этой связи в данной работе, рассмотрены некоторые специальные решения двойных интегралов как средство приобретения инженерных навыков путем применения математической теории в практических областях.

2. Основные понятия двукратных интегралов

Допустим, что область $\overline{D}$ ограничена простой линией L и в ней задана функция $f(x,y)$.

Разделим область $\overline{D}$ на n частей $\overline{D}_1, \overline{D}_2, \overline{D}_3, \dots, \overline{D}_n$ с помощью сети любых простых линий. Обозначим соответственно через $\Delta S_1, \Delta S_2, \Delta S_3, \dots, \Delta S_n$ их площади, а их диаметры соответственно через $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$, введем обозначение $\lambda = max\ d_k, (k = 1,2, \dots, n)$ [9, 10].

Из каждой области $\overline{D}_k$ выберем точку (ξ_k, η_k) и вычислим $f(\xi_k, \eta_k)$.

(E)ISSN: 2181-1784
4(6), June, 2024
www.oriens.uz

Следующая сумма называется интегральной суммой Римана :

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\, \Delta S_k. \qquad (1)$$

Эта сумма зависит от того, какой будет область и как будет выбрана точка (ξ_k, η_k).

Если конечный предел $J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma_n$ не зависит от разделения области и выбора точки (ξ_k, η_k), тогда J называют двукратным интегралом взятым из функции $f(x, y)$ по области $\overline{D}$ и обозначают как $\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy$. Таким образом, согласно определению

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\Delta S_k. \qquad (2)$$

Если для функции $f(x, y)$ существует интеграл $\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy$ то функция $f(x, y)$ называется интегрируемой на $\overline{D}$ и записывается как

$$f(x, y) \in R(\overline{D}).$$

Приведем важные свойства двукратного интеграла [11-16].

1. $\iint_{\overline{D}} \mu dxdy = \mu S$, где C – площадь области $\overline{D}$, μ – любое число, в частном случае $\iint_{\overline{D}} dxdy = S$ $(\mu = 1)$.
2. Если $f(x, y) \in R(\overline{D})$ и μ – любое число, тогда имеем
$$\iint_{\overline{D}} \mu f(x, y)dxdy = \mu \iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy .$$
3. Если $f(x, y) \in R(\overline{D}), g(x, y) \in R(\overline{D})$, тогда имеем
$$\iint_{\overline{D}} (f(x, y) + g(x, y))dxdy = \iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy + \iint_{\overline{D}} g(x, y)dxdy.$$
4. Если $\overline{D} = \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ и $f(x, y) \in R(\overline{D})$, тогда имеем
$$\iint_{\overline{D_1} \cup \overline{D_2}} f(x, y)dxdy = \iint_{\overline{D_1}} f(x, y)dxdy + \iint_{\overline{D_2}} f(x, y)dxdy.$$
5. Если $f(x, y) \in R(\overline{D}), \varphi(x, y) \in R(\overline{D})$ и для каждой точки $\overline{D}$ $f(x, y) \leq \leq \varphi(x, y)$, тогда справедливо $\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy \leq \iint_{\overline{D}} \varphi(x, y)dxdy$.
6. Если для $f(x, y) \in R(\overline{D})$ и каждой точки $\overline{D}$ справедливо $m \leq f(x, y) \leq\leq M$, тогда $mS \leq \iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy \leq M\,S$.
7. Если $f(x, y) \in R(\overline{D})$ и функция $f(x, y)$ непрерывна на $\overline{D}$, т.е. $f(x, y) \in \ \in C(\overline{D})$, тогда на $\overline{D}$ найдется как минимум одна такая точка (ξ, η), что $\iint_{\overline{D}} f(x, y)dxdy = Sf(\xi, \eta)$. Это выражает теорему о среднем значении.

8. Если $f(x,y) \in R(\bar{D})$, тогда справедливо неравенство $\left|\iint_{\bar{D}} f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_{\bar{D}} |f(x,y)|dxdy$.

3. Вычисление двукратного интеграла в прямоугольной области

Предположим, что заданная функция $f(x,y)$ ограничена в прямоугольнике $\bar{P} = \{(x;y): a \leq x \leq b; c \leq y \leq d\}$. Далее допустим, что для каждого $y \in [c;d]$ существует интеграл $\int_a^b f(x,y)dx$. Тогда на отрезке $[c,d]$ будет определена какая-либо функция $\varphi(y)$

$$\varphi(y) = \int_a^b f(x;y)dx. \qquad (3)$$

Допустим, что существует интеграл

$$\int_c^d \varphi(y)dy = \int_c^d \{\int_a^b f(x.y)dx\}dy .$$

Интеграл справа называется повторным интегралом.

Таким же образом можно определить интеграл

$$\int_a^b \{\int_c^d f(x,y)dx\}dx. \ (4)$$

В результате справедливо следующее равенство [7]:

$$\iint_{\bar{P}} f(x,y)dxdy = \int_c^d \{\int_a^b f(x,y)dx\}dy = \int_a^b \{\int_c^d f(x,y)dy\}dx. \quad (5)$$

Пример 1. Вычислить интеграл:

$$\iint_{\bar{P}} \frac{dxdy}{(x+y+5)^2}, \text{где } \bar{P} = \{(x;y).\ 1 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq 2\}.$$

Интеграл можно решить следующим путем:

$$\iint_{\bar{P}} \frac{dxdy}{(x+y+5)^2} = \int_0^2 dy \int_1^2 \frac{dx}{(x+y+5)^2} = -\int_0^2 (\frac{1}{(x+y+5)})|_1^2 \ dy = -\int_0^2 [\frac{1}{y+7} - \frac{1}{y+6}]dy = -[\text{лн}(y+7) - \text{лн}(y+6)]|_0^2 = -(ln9 - ln8) - (ln7 - ln6)) = ln\frac{28}{27};$$

Этот же интеграл можно вычислить следующим образом:

$$\iint_{\bar{P}} \frac{dxdy}{(x+y+5)^2} = \int_1^2 dx \int_0^2 \frac{dy}{(x+y+5)^2} = -\int_1^2 \left(\frac{1}{(x+y+5)}\right)|_0^2 dx = -\int_1^2 (\frac{1}{x+7} - \frac{1}{x+5})dx = (\text{лн}(x+5) - \text{лн}(x+7))\,|_1^2 = ln\frac{28}{27}$$

.

Результат одинаков, однако вычисления показывают, что порядок интеграла может привести к упрощению решения и порядок интеграла целесообразно выбирать в зависимости от подинтегральной функции [4].

В некоторых задачах приходится интегрировать гармонические функции.

Пример 2. Вычислить интеграл:

$$\iint_{\bar{P}} y\,\text{coc}(2xy)\,dxdy,$$

где $\bar{P} = \{(x;y): 0{,}5 \leq x \leq 1,\ \ 0{,}5\pi \leq y \leq \pi\}$

Для начала интеграл можно вычислить следующим путем:

$$\iint_{\bar{P}} \ y\, \text{сос}(2xy)\, dxdy \ = \int_{0,5}^{1} dx \int_{0,5\pi}^{\pi} y\, \text{сос}(2xy)\, dy$$

Вычисление внутреннего интеграла по частям будет иметь вид:

$$\int_{0,5\pi}^{\pi} y\, \text{сос}(2xy)\, dy = [\, u = y; du = dy; dv = \text{сос}(2xy)\, dy; v = \frac{1}{2x} sin2xy \ \ ] = \frac{y}{2x} sin(2xy)|_{0,5\pi}^{\pi} - \frac{1}{2x}\int_{0,5\pi}^{\pi} \text{син}(2xy)\, dy = \frac{\pi}{2x}(\text{син}(2\pi x) - \frac{1}{2} sin\pi x) + \frac{1}{4x^2}(cos2\pi x - cos\pi x)$$

Если подставить найденную функцию во внутренний интеграл, то получаются интегралы вида $\int \frac{sin\pi x}{x} dx$ и $\int \frac{\text{сос}(\pi x)}{x^2} dx$. В этом случае получились интегралы, которые не выполняются в классе элементарных функций. Сменив порядок интегрирования получим решение в классе элементарных функций:

$$\iint_{\bar{P}} \ y\, \text{сос}(2xy)\, dxdy \ = \int_{0,5\pi}^{\pi} ydy \int_{0,5}^{1} \text{сос}(2xy)\, dx = \int_{0,5\pi}^{\pi} y \frac{\text{син}(2xy)}{2y} |_{0,5}^{1} dy = \frac{1}{2}\int_{0,5\pi}^{\pi}(sin2y - -siny)dy = \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}cos2y + cosy)|_{0,5\pi}^{\pi} = -1$$

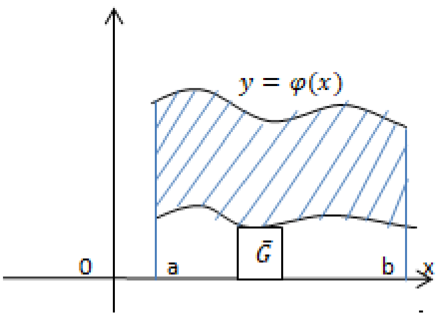
.

Кроме того, как видно, смена порядка интеграла способствует упрощению и ускорению нахождения решения.

4. Вычисление двукратного интеграла в криволинейной области

Предположим, что функция $f(x,y)$ задана в области $\bar{G}$, ограниченной прямыми x=a , $x = b, y = \varphi(x), y = \psi(x)$. Тогда уместна формула

$$\iint_{\bar{G}} f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy. \quad (6)$$



Аналогично, если область ограничена линиями
$y = c\,; y = d \ \ (c < d), \ x = \ \alpha(y); x = \beta(y)$, тогда уместна формула

$$\iint_{\bar{G}} f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x,y)dx \quad (7)$$

Применение формул (6) или (7) зависит как от вида функции $f(x;y)$, так и от вида области. Если область $\bar{G}$ не удовлетворяет вышеуказанным условиям, тогда область $\bar{G}$ надо будет разбить на соответствующие части.

Пример 3. Вычислить $\iint_{\bar{G}}(2x^2+3y)dxdy$, где $\bar{G}$ область, ограниченная параболами $y=x^2$ и $x=y^2$. Точки пересечения парабол (0;0) и (1;1). Один из способов решения рассматривает внешний интеграл по x, т.е применение формулы (6):

$$\iint_{\bar{G}}(2x^2+3y)dxdy=\int_o^1 dx\int_{x^2}^{\sqrt{x}}(2x^2+3y)dy=\int_o^1(2x^2y+1,5y^2)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}}dx==\int_o^1(2x^2\sqrt{x}+1,5x-2x^4-1,5x^4)dx=\frac{87}{140}.$$

В другом случае применяется формула (7), т.е. рассматривается внешний интеграл по $й$:

$$\int_0^1 dy\int_{y^2}^{\sqrt{y}}(2x^2+3y)\,dy=\int_0^1[\frac{2}{3}x^2+3xy]\Big|_{y^2}^{\sqrt{y}}dy=\int_0^1[\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}y^6+3y^{\frac{3}{2}}-$$
$$-3y^3]dy=(\frac{4}{15}y^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{21}y^7+\frac{6}{5}y^{\frac{5}{2}}-\frac{3}{4}y^4)\Big|_0^1=\frac{4}{15}-\frac{2}{21}+\frac{6}{5}-\frac{3}{4}=\frac{87}{140}.$$

В результате имеем одинаковый ответ, что доказывает уместность формул (6) и (7). Выше было отмечено, что важность выбора порядка вычисляемого интеграла увеличивается при подинтегральных функциях, приводящих к интегралам, невыполняемым в классе элементарных функций.

В следующем примере иллюстрируется применение свойства двукратного интеграла о возможности объединения задаваемых областей двукратных интегралов в криволинейной области.

Пример 4. Упростить вычисление путем объединения области задания интегралов.

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}}dx\int_o^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy+\int_{-\sqrt{3}}^0 dx\int_0^{2-\sqrt{4-x^2}}f(x,y)dy.$$

Решение. Пусть области $\overline{G_1}$ и $\overline{G_2}$ области первого и второго интегралов соответственно. Для начала очертим область $\overline{G_1}$, затем $\overline{G_2}$.

$\overline{G_1}=\{(x;y);-2\le x\le-\sqrt{3};\quad 0\le y\le\sqrt{4-x^2}\}$;

$\overline{G_2}=\{(x;y);\ -\sqrt{3}\le x\le 0,\ \ 0\le y\le 2-\sqrt{4-x^2}\}$.

Из очерченной формы видно, что область интеграла будет следующей:

$\bar{G}=\overline{G_1}\cup\overline{G_2}$.

$\bar{G}=\{(x;y){:}\,0\le y\le 1,\alpha(y)\le x\le\beta(y)\}$;

$x=\alpha(y)=-\sqrt{4-y^2}$; $x=\beta(y)=-\sqrt{4y-y^2}$.

Таким образом

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy =$$
$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{4y-y^2}} f(x,y)dx$$

.

5. Механическая и геометрическая интерпретация двукратного интеграла

Механическая интерпретация двукратного интеграла заключается в следующем. Если плотность плоской пластины равна $\rho(x;y)$, тогда ее масса находится по формуле $m = \iint_{\bar{D}} \rho\,(x;y)dxdy$, статические моменты относительно осям координат плоской пластины равны [9-11]:

$$S_y = \iint_{\bar{D}} x\rho\,(x,y)dxdy\,; \qquad S_x = \iint_{\bar{D}} y\rho\,(x,y)dxdy.$$

Моменты инерции по координатным осям плоской пластины и относительно полюса выражаются в виде

$$J_x = \iint_{\bar{D}} y^2\rho(x,y)dxdy; \quad J_y = \iint_{\bar{D}} x^2\rho(x,y)dxdy;$$
$$J_0 = \iint_{\bar{D}} (y^2+x^2)\,\rho(x;y)dxdy = J_x + J_y.$$

Координаты центра тяжести плоской пластины

$$x_c = \frac{\iint_{\bar{D}} x\,\rho(x,y)dxdy}{\iint_{\bar{D}} \rho(x,y)dxdy}\,; \qquad y_c = \frac{\iint_{\bar{D}} y\ \rho(x,y)dxdy}{\iint_{\bar{D}} \rho(x,y)dxdy}.$$

Пример 5. Найти массу $м$ и статические моменты S_x, S_y фигуры ограниченной первой четвертью эллипса $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$ и осями координат. Плотность поверхности $\mu = kxy,\ k - const.$

Решение.

$$m = \iint_{\bar{D}} kxydxdy = k\int_0^2 xdx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} ydy = \frac{k}{2}\int_0^2 xdxy^2 \Big|_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{k}{2}\frac{1}{4}\int_0^2 x\,(4 - x^2)dx = \frac{k}{8}(2x^2 - \frac{x}{4})\Big|_0^2 = \frac{k}{2}.$$

Статические моменты пластинки:

$$S_x = \iint_{\bar{D}} ykxydxdy = k\int_0^2 xdx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} y^2dy = \cdots = \frac{4}{15}k;$$
$$S_y = \iint_{\bar{D}} xkxydxdy = k\int_0^2 x^2dx \int_0^{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} ydy = \cdots = \frac{8}{15}k. \quad [15]$$

Пример 6. Найти массу неоднородной плоской пластинки, ограниченную линиями $y = x^2$; $x = 0$; $y = 1$. Плотность поверхности равна вторичности координаты точки, отсчитываемой от оси oy.

Решение.

Имеем область: $D = \begin{cases} 0 \le x \le 1; \\ x^2 \le \ y \le 1. \end{cases}$

По условию задачи $\gamma = 2x$. Тогда

$$m = \iint_D \gamma dxdy = 2\int_0^1 xdx \int_{x^2}^1 dy = 2\int_0^1 x(1-x^2)dx = \frac{1}{2}.$$

Пример 7. Найти массу неоднородной пластинки ограниченную линиями $(x-1)^2 + y^2 = 1, (x-2)^2 + y^2 = 4$. Плотность пропорциональна расстоянию от начала координат к каждой точке.

Решение. Рисуем фигуры *Д*. Фигура ограничена двумя окружностями. Перейдем к полярой системе координат:

$$x = \rho\, \text{сос}\varphi, \quad y = \rho\, \text{син}\, \varphi,$$

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \to \rho = 2\, \text{сос}\varphi,$

$(x-2)^2 + y^2 = 4 \to \rho = 4\text{сос}\varphi,$

Плотность $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2} = \rho.$

Граница рассматриваемой поверхности:

$$D = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}; \\ 2\, \text{сос}\, \varphi \le \rho \le 4\, \text{сос}\ \varphi. \end{cases}$$

Тогда решение задачи о фигуре находится следующим образом:

$$m = \iint_D \gamma\rho d\rho d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{2\,\text{сос}\varphi}^{4\,\text{сос}\varphi} \rho^2 d\rho = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(\frac{\rho^3}{3}\right) \Big|_{2\,\text{сос}\varphi}^{4\,\text{сос}\varphi} =$$

$$\frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{сос}^{\ 3}\ \varphi d\varphi == \frac{56}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \text{син}^{\ 2}\, \varphi)\, \text{сос}\, \varphi d\varphi = \frac{56}{3}(\text{син}\, \varphi - \frac{\text{син}^{\ 3}\varphi}{3}) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{224}{9}.$$

В некоторых случаях фигура может хранить и отрицательные координаты, в таких случаях эта часть области заменяется положительными координатами.

При геометрической интерпретации двукратный интеграл по неотрицательной функции $f(x,y)$ по области $\overline{D}$ выражает объем тела, ограниченного снизу плоскостью $z = 0$, сверху поверхностью $z = f(x;y)$ и боковой цилиндрической поверхностью, основанием которой является граница области $\overline{D}$ [6].

Пример 8. Найти объем тела, ограниченного заданными плоскостями *x=2* и *й=2,* параболоидой $x^2 + 2y^2 + z = 16$ и тремя плоскостями координат.

Решение. Рассмотрим случаи, когда *C* является твердым телом, лежащим под поверхностью $z = 16 - x^2 - 2y^2$ и входящим в квадрат

$$R = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}.$$

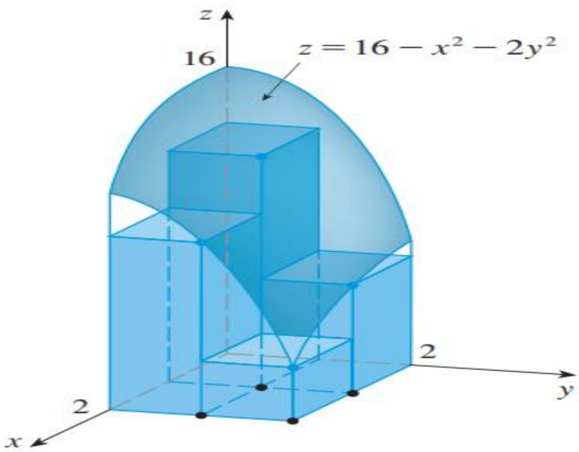


Рис.1. Объем тела, ограниченного областями.

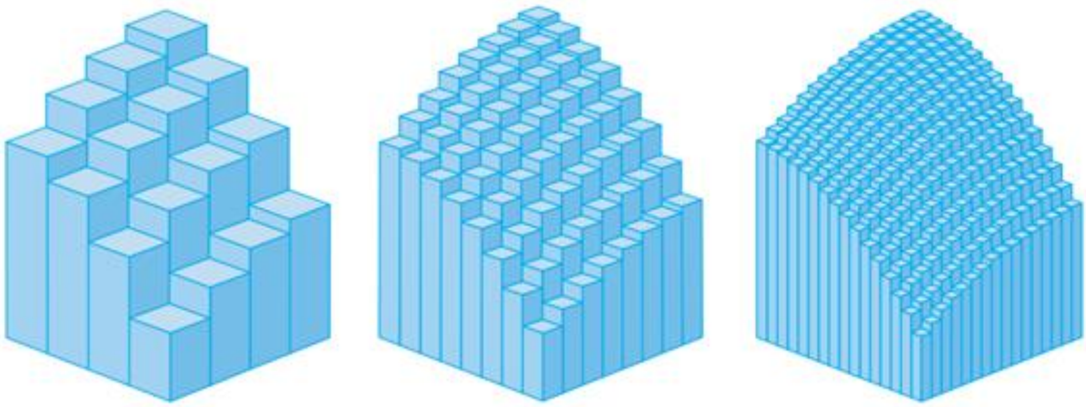
Воспользуемся двукратным интегралом.

$$V = \iint_R (16 - x^2 - 2y^2)\,dA = \int_0^2 \int_0^2 (16 - x^2 - 2y^2)\,dxdy =$$

$$= \int_0^2 \left[16x - \frac{1}{3}x^2 - 2y^2x\right]_{x=0}^{x=2} dy =$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{88}{3} - 4y^2\right) dy = \left[\frac{88}{3}y - \frac{4}{3}y^3\right]_0^2 = 48$$

Твердое тело в примере иллюстрируют объем и определения двукратных интегралов, соединяющихся суммой Римана через (м) = (н) = 24 столбца.



$(\boldsymbol{a}) m = n = 4, V \approx 41{,}5;$ $(\boldsymbol{b})\ m = n = 8, V \approx 44{,}875;$ $(\boldsymbol{c})\ m = n = 16, V \approx 46{,}46875.$

Рис. 2. Объем тела при различных параметрах суммы Римана.

По иллюстрациям можно проследить как с увеличением (м) и (н) изображение тела приближается к реальной форме.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в данном исследовании показано, что подобно нахождению поверхностей кривых криволинейной трапеции путем приведения к простым определенным интегралам, можно получать упрощенные методики решения задач о поверхности и объеме цилиндрических тел, выражаемых двойными интегралами путем приведения их к определенным интегралам. Кроме того на практике вычисления интегралов часто встречаются случаи сложных подинтегральных функций, приводящих к интегралам, нерешаемым в классе элементарных функций. Методики изменения порядка интегрирования, объединения областей интегрирования, приведенные в данной работе, помогают преодолеть проблему нерешимости таких интегралов.

Отметим, что усвоение свойств двойного интеграла полезно также при вычислении поверхностей и объемов фигур с гладкими сферическими поверхностями и в целом при изучении трехмерных объектов.

В связи с этим, учитывая, что для студентов, обучающимся инженерным специальностям дисциплина математики, несмотря на сложность ее восприятия у неспециалистов, важна для освоения практических навыков по профессии, можно утврждать, что представленные в работе способы применения двумерных интегралов направлены на более качественное формирование математической компетентности у будущих инженеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. Казачек Н. А. 2010, Математическая компетентность будущего учителя математики // Известия Российского государственного педагогического университета им. А.И. Герцена. – №. 121. – с. 45-56.
2. Иляшенко Л. К., Мешкова Л. М. 2014, Понятийное поле компетентностного подхода: компетентность, компетенции, математическая компетентность, профессиональная компетентность // Глобальный научный потенциал. – №. 3. – С. 36.
3. Бугров Я.С., Никольский С.М. 1985, Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука,– с. 163-170, 175-185.
4. Федоров Д. Л. 2016, О двойном интеграле Римана–Стилтьеса //Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – Т. 26. – №. 3. – С. 366-378.

5. Фихтенгольц Г.М. 2009, Курс дифференциального и интегрального исчисления: учебник: в 3 т. Т. 2. – 9-е изд. СПб.: Лань, 800 с.: ил. — (Учебники для вузов. Специальная книга).
6. Дерр В.Я. 2008, Теория функций действительной переменной. Лекции и упражнения. М.: Высшая школа, с. 384.
7. Гусейнли А. А., Мирзабалаева А. И. 2018, Эквивалентность базисности двойной системы экспонент к корректной разрешимости задачи Римана//Дифференциальные уравнения и смежные проблемы. Материалы Международной научной конференции. В 2-х томах. - с. 268-270.
8. Савельев Л. Я. 2014, Элементы теории пределов (интеграл Римана)//Вестник Новосибирского государственного университета. Серия: Педагогика. – Т. 15. – №. 2. – С. 5-26.
9. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. 2015, Курс математического анализа М.: «БИНОМ» - 245 стр.
10. Фихтенгольц Г.М. 1970, Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1, 2, 3 т. М.: «Наука». – 270 стр.
11. Бруй И.Н., Гаврилюк А.В и др. 1991, Лабораторный практикум по математическому анализу. – Минск.: Высшая школа, 178 стр.