НЕПОДВИЖНЫЙ ТОЧКИ КВАДРАТИЧНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ НА S^1*S^1

Х. Ж. Мейлиев (КарГУ),
Ш.О.Холбеков(КарИЭИ)

АННОТАЦИЯ

В настоящий работе рассматривается траектории квадратичные стохастический операторы при менделеевском типе наследования двуполой популяции на одно мерным симплексе.

Ключевые слова: *Пространство, квадратичные стохастические операторы, траекторий квадратичных операторов, аналитические методы, дифференциация, наследственность, популяция, скрещивание и тогдали.*

ABSTRACT

In this paper, we consider the trajectories of quadratic stochastic operators for the Mendeleev type of inheritance of a bisexual population on a one-dimensional simplex.

Keywords: *Space, quadratic stochastic operators, trajectories of quadratic operators, analytical methods,differentiation, heredity, population, crossing and then.*

ВВЕДЕНИЕ

Понятие квадратичного стохастические оператора, в первые было дано в работе С.Н.Бернштейна [1], посвященной решению одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности. Квадратичные операторы как объект исследования появились на рубеже тридцатых годов в работах Улама [2], где была поставлена задача изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Невозможность создания достаточно развитых аналитических методов в силу сложных и громоздких рекурренций при изучении траекторий инеобходимость проведения очень большого числа вычислений при изучении конкретных квадратичных операторов не стимулировали интерес к этой задаче. Создание ЭВМ в сороковых годах возродило интерес к проблеме изучения поведения траекторий квадратичных операторов. Улам и его сотрудники провели вычисления на ЭВМ для достаточно большего числа квадратичных операторов.

ОБСУЖДЕНИЕ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Квадратичные стохастические операторы появляются в весьма различных областях математики и ее приложений: теории вероятностей, теории дифференциальных уравнений, теории динамических систем, математической биологии и других.

Определения. Пусть $F = \{F_1, F_2, F_3 \dots, F_n\}$ –множество женского типа, $M = \{M_1, M_2, M_3 \dots, M_v\}$- множество мужских типа. Состоянием популяции называется пара распределений вероятностей $x = \{x_1, x_2, x_3 \dots, x_n\}$ – и $y = \{y_1, y_2, y_3 \dots, y_v\}$ – на множествах соответственно F и M.

$x_i \geq 0 \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad y_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^{v} y_i = 1(1)$

Пространством состояний данной популяции является $S^{n-1} \times S^{v-1}$ декартово произведение (n-1) мерного симплекса S^{n-1} на (v-1) мерной симплекс S^{v-1}.

Дифференциация популяции называется наследственной, если при любом состоянии *(x,y)* в поколении *G* однозначно определено состояние *(x',y')*, возникающее в следующем поколении *G'* путем скрещиваний и отбора.

Отображение $W: S^{n-1} \times S^{v-1} \to S^{n-1} \times S^{v-1}$ отображающие *(n-1)* (v-1)* мерной декартово произведение на себя определяемое равенством

$(x', y') = W(x, y),\ (x, y) \in S^{n-1} \times S^{v-1}$ (2)

называется эволюционным операторам. В координатах оно превращается в систему равенств

$x_i' = f_i(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_v),\ \ 1 \leq i \leq n \quad (3)$

$y_k' = g_k(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, y_1, y_2, y_3, \dots, y_v),\ \ 1 \leq k \leq v,$

которые также называется эволюционными. Отображение (3)при любом начальном состоянии (x^0, y^0) однозначно определяет траекторию

$\{(x^{(t)}, y^{(t)})\}_{t=0}^{\infty}: (x^{(t+1)}, y^{(t+1)}) = \qquad (4)$

$W((x^{(t)}, y^{(t)})) = W^{(t+1)}((x^{(0)}, y^{(0)})), \qquad t = 1,2, \dots$

Выведем эволюционные уравнения двуполой популяции. Исходными данными для этого являются коэффициенты наследственности $P_{ik,j}^{(f)}, P_{ik,j}^{(m)}$. Величина $P_{ik,j}^{(f)}$ определяется как вероятность рождения потомка женского типа $F_j,\ 1 \leq j \leq n.$ у матери типа $F_j,\ 1 \leq j \leq n$, и отца типа $M_k,\ 1 \leq k \leq v$ Аналогично определяется $P_{ik,j}^{(m)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq k \leq v$ очевидно,

$$P_{ik,j}^{(f)} \geq 0,\ \ \sum_{j=1}^{n} P_{ik,j}^{(f)} = 1 P_{ik,j}^{(m)} \geq 0,\ \ \sum_{j=1}^{n} P_{ik,j}^{(m)} = 1 \qquad (5)$$

коэффициенты наследственности суммарно учитывает, например, такие факторы, как рекомбинационный процесс, отбор гамет, мутации, дифференциальная рождаемость.

Пусть (x,y)-состояние в поколении *G*. *(x',y')*- возникающее в следующем поколении G' в момент его содержания вероятности типов находятся по формуле полной вероятности:

$$W: \begin{cases} x_j' = \sum_{i,k=1}^{n,v} P_{ik,j}^{(f)} x_i y_k, 1 \le j \le n, \\ y_l' = \sum_{i,k=1}^{n,v} P_{ik,l}^{(m)} x_i y_k, 1 \le l \le v, \end{cases} \qquad (6)$$

Квадратичный стохастический оператор называется менделеевским, если правила наследования, определенные этим оператором, удовлетворяют законам Менделя [8], т.е. траектории квадратичный стохастический операторы стабилизуется со второго шага.

Пусть *n=v=2*. Приведём некоторые модели, описываемые квадратичными стохастическими операторами.

$$W: \begin{cases} x_1'' = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \\ x_2'' = \frac{1}{2}(x_2 + y_2), \\ y_1'' = \frac{1}{2}(x_1 + y_1), \\ y_2'' = \frac{1}{2}(x_2 + y_2), \end{cases} \qquad (7)$$

откуда следует, что частоты генотипов во всех последующих поколениях будут такими же, как в первом поколении. Сформулируем это свойство в виде следующего теорема.

Теорема 1.Устойчивая (стабильная) частота генотипов достигается за одно поколение.

Это теорема есть третье утверждение закона Харди-Вайнберга, правда, чуть в общем виде.

Из (7) видно что прообраз ((1;0),(0;1)) и ((0;1),(1;,0)) пуст, откуда следует, что оператор не является сюръективным отображением.

Теорема 1.Устойчивая (стабильная) частота генотипов достигается за одно поколение.

REFERENCES

1. Ганиходжаев Р.Н. Квадратичные стохастические операторы, функция Ляпунова и турнира//Мат.Сб.-1992.-83,№8.-С.119-140.
2. Ганиходжаев Н.Н.,Мейлиев Х.Ж. Об одной конструкции квадратичных оператров.//ДАН РУз, 1997.
3. Lyubich Ya.I. Mathematical structures in populationgenettes//Biomathematics -1992. 22//.
4. Розиков У.А., Жамилов У.У. Вольтерровские квадратичные стохастические операторы двуполой популяции.//Укр.мат.жур.,2001.м 63.№7//
5. Розиков У.А., Жамилов У.У. Динамике строго невольтеровских квадратичных стохастических операторов на двумерном симплексе.//Мат.сб.-2009.-200,№9.-с.81-94.