Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Research BIB / Index Copernicus
(E)ISSN: 2181-1784
4(6), June, 2024
www.oriens.uz

# TASODIFIY MIQDORLAR YIGINDISINING YUQORI TARTIBLI MOMENTLARINI XARAKTERISTIK FUNKSIYALAR METODI ORQALI ANIQLASH

**Dushatov N.T.,**
**Obloqulov S.Z.**
Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti
Olmaliq filiali
n_dushatov@rambler.ru

## ANNOTATSIYA

*Мақолада xarakteristik funksiyalar metodi yordamida tasodifiy miqdorlar yig'indisining $k-$ tartibli momentini aniqlash masalasi o'rganilgan. $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bo'gliqsiz va $\alpha$ parametr bilan ko'rsatkichli qonunga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar yig'indisining $k-$ tartibli momenti topilgan.*

***Kalit so'zlar**: tasodifiy miqdor, zichlik funksiya, ko'rsatkichli taqsimot, xarakteristik funksiya, $k-$ tartibli momenti.*

## ABSTRACT

*The problem of determining the order moment of the sum of random variables using the method of characteristic functions is studied in the article. $k-$order moment of the sum of independent random variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ subject to the exponential law with the $\alpha$ parameter is found.*

***Key words:** random variable, density function, exponential distribution, characteristic function, $k-$order moment.*

## АННОТАЦИЯ

*В статье исследуется задача определения момента k-го порядка суммы случайных величин методом характеристических функций. Найден момент k-го порядка суммы независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ , подчиняющихся экспоненциальному закону с параметром $\alpha$ .*

***Ключевые слова:** случайная величина, функция плотности, показательное распределение, характеристическая функция, момент k-го порядка.*

**1-Tarif. [1]** $\xi-$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi deb haqiqiy t argumentning ushbu

$$f_\xi(t) = Me^{itx} = \int_\Omega e^{itx} dP = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_\xi(x) \tag{1}$$

funksiyasiga aytiladi.

Agar $\xi$ diskret taqsimotga ega bo`lsa, u holda xarakteristik funksiya

$$f_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} P(\xi = x_k) = \sum_k e^{itx_k} p(x_k) \qquad (2)$$

tenglik orqali ifodalanadi.

Agar $\xi$ tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz taqsimotga ega bo`lib, $p(x)$ uning zichlik funksiyasi bo`lsa, u holda

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p(x)dx$$

bo`ladi, yani absolyut uzluksiz tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi $p(x)$ zichlik funksiyaning Fure almashtirishidan iborat.

**1-Teorema. [1]** $f_\xi(t) - \xi$ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi bo`lsin.

U holda

1. $f_\xi(0) = 1$ , $|f_\xi(t)| \le 1$;

2. Ixtiyoriy $a$ va $b$ o`zgarmas haqiqiy sonlar uchun $f_{a+b\xi}(t) = e^{iat} f_\xi(bt)$ tenglik o`rinli;

3. $\bar{f}_\xi(t) = f_\xi(-t) = f_{-\xi}(t)$;

4. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ o`zoro bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar bo`lsa, u holda

$$f_{\xi_1+...+\xi_n}(t) = f_{\xi_1}(t) \cdot f_{\xi_2}(t) \cdots f_{\xi_n}(t)$$

tenglik o`rinli;

5. $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya $R_1 = (-\infty, \infty)$ da tekis uzluksiz;

6. $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya haqiqiy bo`lishi uchun $\xi$ tasodifiy miqdorning $F_\xi(x)$ taqsimot funksiyasi simmetrik bo`lishi zarur va etarli.

**2-Teorema. [1]** Agar $E|\xi|^k < \infty$ bo`lsa, $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya $k$-tartibli uzluksiz hosilaga ega bo`lib, quyidagi munosabatlar o`rinli:

$$f_\xi^{(\nu)}(t) = i^\nu \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu e^{itx} dF_\xi(x), \quad \nu = 1,2,...,k, \qquad (3)$$

$$f_\xi^{(\nu)}(0) = i^\nu E\xi^\nu, \qquad (4)$$

$$f_\xi(t) = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{(it)^\nu}{\nu!} E\xi^\nu + o(t^k), \quad t \to 0. \qquad (5)$$

**2-Ta’rif. [1]** $\xi - (\Omega, A, \mathrm{P})$ ehtimollar fazosida aniqlangan tasodifiy miqdor va k>0 biror son bo`lsin. Agar $M|\xi|^k$ matematik kutilma mavjud bo`lsa, u holda $a_k = M\xi^k$

songa $\xi$ tasodifiy miqdorning k-tartibli boshlang`ich momenti, $m_k = M|\xi|^k$ songa esa, uning k-tartibli absolyut momenti deyiladi.

Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bo'gliqsiz va $\alpha$ parametrli ko'rsatkichli taqsimotga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar bo'lsa, uning taqsimoti $P(\xi_i \le x) = 1 - e^{-\alpha x}, \; x \ge 0, \; i = 1, 2, ...$ [2].

**Lemma.** Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bo'gliqsiz va $\alpha$ parametr bilan ko'rsatkichli qonunga bo'ysinuvchi tasodifiy miqdorlar bo'lsa, u holda ihtiyoriy $k, n = 1, 2, ...$ uchun

$$M\left(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n\right)^k = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)}{\alpha^k}$$

bo'ladi.

**Isboti.** Ko'rsatkichli taqsimot xarakteristik funksiyasi $f_{\xi_i}(t) = \dfrac{\alpha}{\alpha - it}$. Endi $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ kabi belgilash kiritamiz. Asosiy masala $M\eta_n{}^k$ ni topishdan iborat. (4) munosabatga ko'ra $M\eta_n{}^k = \dfrac{1}{i^k} f_{\eta_n}^{(k)}(0)$. Xarakteristik funksiyaning 1-teorema 4-punktidagi xossasiga ko'ra:

$$f_{\eta_n}(t) = \prod_{j=1}^{n} f_{\xi_j}(t) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - it}\right)^n$$

Uning k-tartibli hosilasini topamiz:

$$f'_{\eta_n}(t) = \alpha^n(-n)(\alpha - it)^{-n-1}(-i) = \alpha^n ni(\alpha - it)^{-n-1},$$

$$f''_{\eta_n}(t) = \alpha^n n(-n-1)i(\alpha - it)^{-n-2}(-i) = \alpha^n n(n+1)i^2(\alpha - it)^{-n-2},$$

..............................

$$f_{\eta_n}^{(k)}(t) = \alpha^n n(n+1)(n+2)...(n+k-1)i^k(\alpha - it)^{-n-k},$$

$$f_{\eta_n}^{(k)}(t) = \frac{\alpha^n n(n+1)(n+2)...(n+k-1)i^k}{(\alpha - it)^{n+k}}.$$

t=0 nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz

$$f_{\eta_n}^{(k)}(0) = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)i^k}{\alpha^k}$$

Demak,

$$M\eta_n{}^k = \frac{1}{i^k} f_{\eta_n}^{(k)}(0) = \frac{1}{i^k} \cdot \frac{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)i^k}{\alpha^k} = \frac{n(n+1)(n+2)...(n+k-1)}{\alpha^k}.$$

**FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR (REFERENCES):**

1. Боровков А.А. Математическая статистика. М.: Наука. 1984.
2. Б.А.Севостьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.