О НЕКОТОРЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННО – СОСТАВНОГО ТИПА

Муминов Фарход Маликович
канд.мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

АННОТАЦИЯ

В этом статье приводится постановка корректной краевой задачи для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа. При определённых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается этих задач.

Ключевые слова: *уравнения смешанно-составной, корректность*

В этом статье приводится постановка корректной краевой задачи для уравнения третьего порядка смешанно-составного типа. При определённых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается этих задач.

В односвязной области D, ограниченной гладкой линией σ, опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости $(x>0,\ y<0)$ и отрезками $AA_1,\ BE,\ A_1E$ прямых $x=0,\ x=1,\ y=1$ соответственно, где $O,\ E-$ точки с координатами $(0,0),\ (1,1)$ рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Lu\right)=0, \qquad (1)$$

где $Lu=u_{xx}+\dfrac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\dfrac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_{y}$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D $(y\neq 0)$.

2. Функция $u(x,y)$ и ее частные пройзводные первого порядка непрерывны в замкнутой области (допускается, что в точках $O(0,0),\ B(1,0)$ частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы).

3. Функция $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям.

$$u\big|_{\sigma}=f(\xi),\, u\big|_{BE}=\psi_1(y),\, u(0,y)+u(0,-y)\big|_{AA_1}=\psi(y),$$
$$u_x\big|_{AA_1}=\nu(y),\, \frac{\partial u}{\partial n}\big|_{\sigma}=f_1(\xi), \tag{2}$$

где f, $f_1, \psi, \psi_1, \nu -$ заданные функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, причем $\psi(y)-$ четная функция.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами задачи 1 кроме краевого условия $u\big|_{BE}=\varphi_1(y)$, которое заменяется условием $u\big|_{x=1}=u\big|_{BE}$ $(0<e<1)$.

При исследовании этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решение уравнение (1) представимо в виде

$$u(x,y)=z(x,y)+\mu(y), \tag{3}$$

соответственно [1-3], где $z(x,y)-$ регулярное решение уравнения

$$u_{xx}+\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_y=0. \tag{4}$$

Обозначим $\mu(y)=\begin{cases}\mu_1(y), & 0\le y\le 1,\\ \mu_2(y), & -1\le y\le 0,\end{cases}$ $\mu_2(x,y)-$ произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функция, $\mu_1(y)-$ произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Без ограничения общности можно предполагать $\omega(0)=\omega'(0)=0$. Предполагается, что σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямым $x=0,\ x=1.$

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(0)=\mu'(0)=0$.

На основе (3) и (2) задача 2 редуцируется к определению регулярного решение (4) в области $D\ (y\neq 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$z\big|_{\sigma}=f(\xi)-\mu_2(y),\, z\big|_{BE}=\psi_1(y)-\mu_1(y),$$
$$z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y),\, z\big|_{OA}=\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y), \tag{5}$$
$$z_x\big|_{AA_1}=\nu(y),\, \frac{\partial z}{\partial \eta}\big|_{\sigma}=f_1(\xi)-\mu_1'(y)\frac{\partial y}{\partial n}.$$

Единственность решение задачи 2 следует из принципа экстремума. (Предполагается, что $\dfrac{\partial x}{\partial n}\neq 0$ вдоль дуги σ).

Определим $\nu_1(x)$. Поставляя значение $\nu_1(x)$ в формулу

$$z(x,y)=\int_0^1 \nu_1(t)G(x,y;t,0)dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\overline{f}(\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{|\xi|=1}d\theta-\int_{-1}^{0}\nu(t)G(x,y;0,t)dt$$

имеем

$$z(x,y)=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\mu_2(\sin\theta)\rho_1(x,y;\theta)d\theta+P(x,y), \qquad (6)$$

$\rho_1(x,y;\theta)$, $P(x,y)$ – известные функции реализуя последнее условие из (5), для определения $\mu_2^{'}(y)$ получаем сингулярное интегральное уравнение (3).

$$\delta(\theta_0)\sin\theta_0+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\delta(\theta)}{\theta-\theta_0}d\theta-\frac{\sin\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_1(\theta,\theta_0)-K_1(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+$$
$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_2(\theta,\theta_0)-K_2(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}Q(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta+ \qquad (7)$$
$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int_{3\pi/2}^{2\pi}Q_1(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta=\rho_2(\theta_0),$$

где $\delta(\theta)=\mu_2^{'}(\sin\theta)$; $K_1(\theta,\theta_0)$, $K_2(\theta,\theta_0)$, $Q(\theta,\theta_0)$, $Q_1(\theta,\theta_0)$ – известные функции.

Из уравнение (7) определим функцию $\mu_2(y)$. Таким образом, функция $u(x,y)$ полностью определяется в области D_2.

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE}=\psi(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OB}=\tau(x),\ z_x\big|_{A_1B}=\nu(y)$$

определяется по формуле

$$z(x,y)=\int_0^y\nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt-\int_0^y[\psi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(x,y;1,t)dt-$$
$$-\int_0^y\nu(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt, \qquad (8)$$

где $\overline{G}(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина.

Функция $z(x,y)$, определенная формулой (2) должна удовлетворять условию $z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y)$,

$$\varphi(y)-\mu_1(y)=\int_0^y\nu(t)\overline{G}(0,y;0,t)dt-\int_0^y\tau(t)\overline{G}(0,y;t,0)dt-$$
$$-\int_0^y[\psi(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(0,y;1,t)dt. \qquad (9)$$

Реализуя условие $z\big|_{OA_1}=\psi(y)-\varphi(-y)-\mu_2(y)$ имеем

$$\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y)=\int\mu_2(\sin\theta)\rho_1(0,y,\theta)d\theta+P(0,y). \qquad (10)$$

(E)ISSN: 2181-1784
5(2), Feb., 2025
www.oriens.uz

Поставляя значение $\varphi(y)$ в формулу (9) для определения $\mu_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu_1(y)+\int_0^y K(y,t)\mu_1(t)dt=P_2(y), \qquad (11)$$

где $K(y,t),\ P_2(y)-$ известные функции.

Из уравнения (11) единственным образом определяется функция $\mu_1(y)$.

Задача 2 редуцируется к определению регулярного решение уравнения (5) удовлетворяющего краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} &z\big|_{\sigma}=f(\xi)-\mu_2(y),\ z\big|_{x=e}=z\big|_{BE}=\varphi_1(y)-\mu_1(y),\\ &z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OA}=\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y),\\ &z_x\big|_{AA_1}=\nu(y)\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\sigma}=f_1(\xi)-\mu_2'(y)\frac{\partial z}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Через $\varphi(y),\ \varphi_1(y)$ обозначены соответственно значения $u(0,y),\ u(1,y)\ (0\le y\le 1)$.

Единственность решения задача 2 доказывается, используя принцип максимума в предположении, что $\frac{\partial x}{\partial n}\neq 0$ вдоль линии.

Существование решения задачи 2 области D_2 определяется как и в случае задачи 1 решение уравнение (5) удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE}=\varphi_1(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OB}=\tau(x),\ z_x\big|_{OA_1}=\nu(x),$$

дается формулой

$$\begin{aligned} z(x,y)=&\int_0^y \nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt-\int_0^1 \tau(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt-\\ &-\int_0^y[\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_{\xi}(x,y;1,t)dt, \end{aligned} \qquad (13)$$

$z(x,y)$ должно удовлетворять условию

$$z\big|_{z=e}=\varphi_1(y)-\mu_1(y),$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y)-\mu_1(y)+\int_0^y[\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_{\xi}(e,y;1,t)dt=\\ &=\int_0^y \nu(t)\overline{G}(e,y;0,t)dt-\int_0^1 \tau(t)\overline{G}(e,y;t,0)dt. \end{aligned} \qquad (14)$$

Интегральное уравнения (14) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, из которого единственном образом определяется $\varphi_1(y)-\mu_1(y)$.

Реализуя условие $z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y)$ из (13) найдем

$$\mu_1(y)=\varphi(y)+\int_0^y[\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(e,y;1,t)dt+$$
$$+\int_0^1\tau(t)G(e,y;t,0)dt+\int_0^1\nu(t)\overline{G}(e,y;0,t)dt. \qquad (15)$$

Поставляя значение $\varphi(y),\,\varphi_1(y)-\mu_1(y)$ в формулу (15) определим функцию $\mu_1(y)$, где $\varphi(y)$ находится из формулы (8).

ЛИТЕРАТУРА

1. Джураев Т.Д. Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов. Т: Фан, 1979.238стр.
2. Бесов О.В., Ильин В.П., Николаевский С.М. Интегральные предоставления функций и теоремы вложения. М: Наука. 1975. 480 стр.
3. Брюханов Ю.А. Об одном классе эллиптических уравнений, выражавшихся на границе. Дифференциальные уравнения. 1973. Т.4 166-168 стр.
4. Врагов В.К. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск НГУ, 1983, 84 стр.
5. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. Наука. 1981 448 стр.
6. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
7. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. О смешанных краевых задачах для уравнения составного типа третьего порядка. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 4 ISSUE 2 ISSN 2181-1784 SJIF 2024: 7.404 ASI Factor = 1.7
8. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. On the formulation of boundary value problems for one third-order equation. International Global Conference 1 (4), 257-263.