VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Муминов Ф.М., Самандаров И.Р., Душатов Н.Т., Миратоев З.М.

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета, г. Алмалык, Узбекистан.

mfarhod007@gmail.com,
n_dushatov@rambler.ru,

АННОТАЦИЯ

Исследования краевые задачи для уравнения составного типа сравнительно новое направление в теории краевых задач. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением в различным задачам механики и физики, такие они возникают при моделировании тепло масс обмена в капелярно–пористых средах ряда различных биологических объектов и других задач.

Ключевые слова: *Нелокаль, нелокальная задача, уравнения смешанно-составной тип, локаль, сингулярное интегральное уравнение.*

ABSTRACT

Investigations of boundary value problems for an equation of composite type are a relatively new direction in the theory of boundary value problems. These problems are of particular interest in connection with their application in various problems of mechanics and physics, such they arise when modeling heat and mass transfer in capillary-porous media of a number of different biological objects and other problems.

Keywords: *Nonlocal, nonlocal problem, equations of mixed-composite type, locale, singular integral equation.*

АННОТАЦИЯ

Учинчи тартибли таркибий аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганиш назарияси анча янги йўналиш ҳисобланади. Дарҳақиқат физика, иқтисод, механика, кимё, медицина ва бошқа фанларда учрайдиган кўплаб жараёнлар дифференциал тенгламалар ёрдамида тавсифланади. Тенгламаларни ўрганиш билан тегишли жараёнлар ҳақида бирор маълумотга эга бўламиз. Ўша дифференциал тенгламалар ўрганилаётган жараённинг математик моделидан иборат бўлади.

Калит сўзлар. *Нолокал, нолокал бўлмаган масала, таркибий типдаги аралаш тенглама, локал, сингуляр типдаги интеграл тенглама.*

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

Односвязной области D, ограниченной гладкой линий σ, опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости $(x>a, y<0)$ и отрезками AA_1, BE, A_1E прямых $x=0$. $x=1$, $y=1$ соответственно, где $O,E-$точки с коэффициентами $(0;0)$, $(1;1)$ рассматривающая уравнения

$$\frac{\partial}{\partial y}(Lu)=0 \qquad (1)$$

где

$$Lu=u_{xx}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_y$$

(2)

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующим свойствами:

1. Функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области D $(y\neq 0)$

2. Функция $u(x,y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области $\overline{D}$ (допускается, что в точках $O(0;0)$, $B(1;0)$ частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы)

3. Функция $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям

$u|_{\sigma}=f(\xi)$ (ξ-точка контура σ), $u|_{A_1E}=\psi_1(x)$

$u|_{x=l}=u|_{BE}$ $\quad (0<l<1)$ $\quad$, $\quad u(0,y)+u(0,-y)|_{AA_1}=\psi(y)$

(3)

$u_x|_{AO}=\nu(y)$

где $f,\psi,\psi_1,\nu-$ заданные функции удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, $\psi(y)-$частная функции при исследования этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решении уравнения (1) представимо в виде

$$u(x,y)=z(x,y)+\omega(x)$$

(4)

Соответственно (1), $z(x,y)-$регулярное решении уравнения

$$z_{xx}+\frac{1-\operatorname{sgn} y}{2}z_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}z_y=0 \quad , \quad (5)$$

Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Scientific Journal Impact Factor
Advanced Sciences Index Factor

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

$\omega-$ произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функция без ограничения общности можно предполагать $\omega(0)=\omega'(0)=0$, предполагается, что σ целиком лежит в полосе ограниченными прямыми $x=0$, $x=1$ на основании (3)-(5) задача 1 редуцируется к определению регулярного решения уравнения (5) в области $D(y\neq 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$\left.\begin{array}{c} z|_{\sigma}=f(\xi)-\omega(x),\ z|_{BE}=z|_{x=l}=\varphi_1(y)-\omega(1) \\ z|_{OA_1}=\varphi(y)\,(0\leq y\leq 1),\ z|_{AO}=\psi(y)-\varphi(-y),\,(-1\leq y\leq 0) \\ z|_{A_1E}=\psi_1(x)-\omega(x),\ z_x|_{AO}=\upsilon(y) \end{array}\right\}$$

(6)

Докажем единственность решения задача 1. Если $f=\psi=\psi_1=\upsilon=0$, то функция $z(x,y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) на отрезке OB и AA_1. Действительно предположим, что положительный максимум (отрицательный минимум) достигается в некоторой точке $N(x_0,0)$. То уравнения $z_{xx}-z_y=0$ следует, что $z_y(x_0,0)\leq 0$ $\left(z_y(x_0,0)\geq 0\right)$ с другой стороны, из эллиптической части области $D=\{(x,y)\in D,\ x>0,\ y<0\}$ имеет $z_y(x_0,0)>0$, $\left(z_y(x_0,0)<0\right)$. Из постановки задачи следует, что $\lim\limits_{y\to 0-} z(x,y)=\lim\limits_{y\to 0+} z(x,y)$, $\lim\limits_{y\to 0-} z_y(x,y)=\lim\limits_{y\to 0+} z_y(x,y)$ отсюда заключаем, что функция $z(x,y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) на OB.

Пусть функция $z(x,y)$ достигает положительно максимума (отрицательного минимума) в точке $N(0,y)$ отрезке A_1O. Тогда $z(x,y)$ достигает положительно минимума (отрицательного максимума) в точке $N_1(0,y)$ отрезке AO. Из условия $z_x|_{AO}=0$ следует, что $z(x,y)$ не достигает положительного максимума (отрицательного минимума) на открытом отрезке OA.

Следовательно, $z(x,y)$ не достигает положительно максимума (отрицательного минимума) на A_1O. Функция $z(x,y)$ не может достигать положительного максимума (отрицательного минимума) на BE. В противном случае этот максимум должен реализоваться внутри области $D_1=\{(x,y)\in D,\ x>0,\ y<0\}$, что невозможно отсюда следует, что $z(x,y)=0$ в

VOLUME 2 | ISSUE 4
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

области D_1. Тогда $\varphi(y)=0, \omega(x)=0$ Следовательно, $z(x,y)\equiv 0$ и в области D_2. Таким образом, доказано, что $u(x,y)\equiv 0$ в области D.

Переходим к доказательству существования решения задачи. Для простаты предположим что $\sigma-$ дуга окружности $x^2+y^2=1$. Регулярное в области D_2 решение уравнения (5) удовлетворяющее краевым условиям $z_x\big|_{AO}=\upsilon(y)$, $z_y\big|_{OB}=\upsilon_1(x)$, $z\big|_{\sigma}=f(\xi)-\omega(x)$ дается формулой

$$z(x,y)=\int_0^1 \upsilon(t)G(x,y,t,0)dt+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\bar{f}(\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{|\xi|=1}d\theta-\int_{-1}^{0}\upsilon(t)G(x,y;0,t)dt$$

(6)

$\bar{f}(\theta)=f(\theta)-\omega(\cos\theta)$; $G(x,y;\xi,\eta)-$ функция Грина. Из равенства (6) пойдем $\tau(x)$

$$\tau(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^1 \upsilon(t)\ln\left|\frac{1-t^2x^2}{t^2-x^2}\right|dt=g_1(x)$$

(7)

где

$$g_1(x)=\int_{-1}^{0}\upsilon(t)G(x,0;0,t)dt+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\bar{f}(\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\bigg|_{|\xi|=1}d\theta$$

В силу непрерывности первых производных от функции $z(x,y)$ из параболической части D_1 области D получаем соотношение между $\tau(x)$ и $\upsilon(x)$

$$\tau^4(x)-\upsilon_1(x)=0$$

(8)

Используя условия $\tau(0)=\tau(1)=0$, из (8) получаем

$$\tau'(x)-\int_0^x \upsilon_1(t)dt+\int_0^1(1-t)\upsilon_1(t)dt=0$$

(9)

Исключая $\tau'(x)$ из (8) и (9), имеем

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1 \upsilon_1(t)\left(\frac{2t^2x}{1-x^2t^2}-\frac{2x}{t^2-x^2}\right)dt=F(x)$$

(10)

где

$$F(x)=\int_0^x \upsilon(t)dt-\int_0^1(1-t)\upsilon_1(t)dt-g_1'(x)$$

Пользуясь заменой переменных

$$\frac{t^2}{1+t^4}=v,\ \frac{x^2}{1+x^4}=s$$

уравнения (10) приводим к виду

$$\frac{1}{\pi}\int_0^1\frac{m(v)}{v-s}dv=P(s)$$

(11)

где

$$m(v)=\upsilon_1(t)\frac{1+t^4}{2t},\quad P(s)=F(x)\frac{1+x^4}{2x}$$

Обращая интегральное уравнение (11), имеем

$$m(v)=-\frac{1}{\pi}\int_0^1\left[\frac{s(1-v)}{v(1-s)}\right]^{\frac{1}{2}}\frac{p(v)}{v-s}=dv$$

Возвращаясь к старим переменным x и t, получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\upsilon_1(x)-\frac{1}{\pi}\int_0^1 k_0(x,t)\upsilon_1(t)dt=f_0(x)$$

(12)

где $K_0(x,t)$ – резольвента ядра

$$f_0(x)=\tilde{f}(x)+\int_0^1 g(x,t)\omega(t)dt$$

где $\tilde{f}_0(x)$, $g(x,t)$ – известные функции.

Подставляя значения $\upsilon_1(x)$ в формулу (9) определяем $\tau(x)$

$$\tau(x)=\int_0^1 p_1(x,t)\omega(t)dt+F_1(x)$$

(13)

Решение уравнения (5), удовлетворяющее краевым условиям $z|_{OA_1}=\varphi(y)$, $z|_{BE}=\varphi_1(y)-\omega(1)=\bar{\varphi}_1(y)$, $z|_{OB}=\tau(x)$ дается формулой

$$z(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\left[\int_0^1\varphi(\eta)G_\xi^*(x,y;0,t)dt-\int_0^y\bar{\varphi}_1(t)G_\xi^*(x,y;1,t)dt+\int_0^1\tau(t)G^*(x,y;t,0)dt\right]$$

(14)

где $G^*(x,y;\xi,\eta)$ – функция Грина.

Реализуя условие $z|_{x=l}=\bar{\varphi}_1(y)$ относительно $\bar{\varphi}_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода с достаточно гладкие ядром

$$\bar{\varphi}_1(y)+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\bar{\varphi}_1(t)G_\xi^*(l,y;1,t)dt=F_2(y)$$

(15)

где

$$F_2(y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^y\varphi(t)G_\xi^*(l,y;0,t)dt+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\tau(t)G^*(l,y;t,0)dt$$

Уравнения (15) имеет единственное решение

Реализую условие $z|_{OA}=\psi(y)-\varphi(-y)$ имеем

$$\varphi(y)=\psi(y)-\int_0^1\upsilon_1(t)G(0,-y;t,0)dt-\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\bar{f}(\theta)\frac{\partial G(0,-y;\cos\theta,\sin\theta)}{\partial n}d\theta+$$

$$+\int_0^1\upsilon_1(-t)G(0,-y;0,-t)dt$$

Подставляя значения $\varphi(y)$, $\bar{\varphi}_1(y)$ в формулу (14) и используя условия $z|_{A_1E}=\psi_1(x)-\omega(x)$, для определения $\omega(x)$ $(0\le x\le 1)$ получаем интегральное уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого следует из единственности решения задачи.

REFERENCES

1. Врагов В.Н. Об одном уравнении смешанного составного типа. Дифференциальные уравнения. 1973.

2. Муминов, Ф. М., Миратоев, З. М., & Утабов, У. А. (2021). Об Одной Краевой Задаче Для Уровнениясоставного Типа Третьего Порядка. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, *2*(4), 17-22.

3. Муминов, Ф. М., & Миратоев, З. М. (2021). О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения.«. *Scientific progress*, *1*(6), 922-927.

4. Муминов Ф.М., Душатов Н.Т. Нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Sciences, 2021. Vol.02, Issue:05, стр.191-196.

5. Сраждинов И.Ф. Начально-краевая задача для одной системы составного типа. Bulletin of the Institute of Mathematics. 2021. Vol.4, №2, ISSN-2181-9483, стр.90-95.

6. Srazhdinov I.F. To investigation of the mixed problem for system of equations of composite type. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES. April 2021. Vol.02, Issue 04. стр.23-32.