О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕЩАННОГО-СОСТАВНОГО ТИПА

Муминов Ф.М., Самандаров И.Р., Душатов Н.Т., Миратоев З.М.

Алмалыкский филиал Ташкентского государственного технического университета, г. Алмалык, Узбекистан.

mfarhod007@gmail.com,
n_dushatov@rambler.ru,

АННОТАЦИЯ

Исследования краевые задачи для уравнения составного типа сравнительно новое направление в теории краевых задач. Особый интерес эти задачи представляют в связи с их приложением в различным задачам механики и физики, такие они возникают при моделировании тепло масс обмена в капелярно – пористых средах ряда различных биологических объектов и других задач. Настоящая работа посвящена исследования краевые задачи для уравнения третьего порядка смешанного составного типа.

Ключевые слова: *Нелокаль, нелокальная задача, уравнения смешанно-составной тип, локаль, сингулярное интегральное уравнение.*

ABSTRACT

The study of boundary value problems for an equation of composite type is a relatively new direction in the theory of boundary value problems. These problems are of particular interest in connection with their application in various problems of mechanics and physics, such they arise when modeling heat and mass transfer in capillary-porous media of a number of different biological objects and other problems. The present work is devoted to the study of boundary value problems for a third order equation of a mixed composite type.

Keywords: *Nonlocal, nonlocal problem, equations of mixed-composite type, locale, singular integral equation.*

АННОТАЦИЯ

Учинчи тартибли таркибий аралаш типдаги дифференциал тенгламалар учун чегаравий масалаларни ўрганиш назарияси анча янги йўналиш ҳисобланади. Дарҳақиқат физика, иқтисод, механика, кимё, медицина ва бошқа фанларда учрайдиган кўплаб жараёнлар дифференциал тенгламалар ёрдамида тавсифланади. Тенгламаларни ўрганиш билан тегишли жараёнлар ҳақида бирор маълумотга эга бўламиз. Ўша дифференциал тенгламалар ўрганилаётган жараённинг математик моделидан иборат бўлади.

Ушбу мақолада учинчи тартибли таркибий-аралаш типдаги тенглама учун чегаравий масала ўрганилган.

Калит сўзлар. *Нолокал, нолокал бўлмаган масала, таркибий типдаги аралаш тенглама, локал, сингуляр типдаги интеграл тенглама.*

В односвязной области D, ограниченной гладкой линией σ, опирающейся на точки $A(0;1)$ и $B(1;0)$ расположенной в четверти плоскости $(x>0,\ y<0)$ и отрезками $AA_1,\ BE,\ A_1E$ прямых $x=0,\ x=1,\ y=1$ соответственно, где $O,\ E-$ точки с координатами $(0,0),\ (1,1)$ рассматриваются уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}(Lu)=0, \tag{1}$$

где $Lu=u_{xx}+\dfrac{1-\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\dfrac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_y$.

Задача 1. Найти функцию $u(x,y)$ со следующими свойствами:

1. Функция $u(x,y)$ является регулярным решением уравнения (1) в области $D\ (y\neq 0)$.
2. Функция $u(x,y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в замкнутой области (допускается, что в точках $O(0,0),\ B(1,0)$ частные производные u_x, u_y могут обращаться в бесконечность порядка меньше единицы).
3. Функция $u(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям.

$$u\big|_{\sigma}=f(\xi),\ u\big|_{BE}=\psi_1(y),\ u(0,y)+u(0,-y)\big|_{AA_1}=\psi(y),$$
$$u_x\big|_{AA_1}=\nu(y),\ \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\sigma}=f_1(\xi), \tag{2}$$

где $f,\ f_1,\psi,\psi_1,\nu-$ заданные функции, удовлетворяющие определенным условиям гладкости и условиям согласования, причем $\psi(y)-$ четная функция.

Задача 2. Найти функцию $u(x,y)$ со свойствами задачи 1 кроме краевого условия $u\big|_{BE}=\varphi_1(y)$, которое заменяется условием $u\big|_{x=1}=u\big|_{BE}$ $(0<e<1)$.

При исследовании этих задач будем пользоваться тем фактором, что любое регулярное решение уравнение (1) представимо в виде

$$u(x,y)=z(x,y)+\mu(y), \tag{3}$$

соответственно [1-6], где $z(x,y)-$ регулярное решение уравнения

$$u_{xx}+\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_{yy}-\frac{1+\operatorname{sgn} y}{2}u_y=0. \qquad (4)$$

Обозначим $\mu(y)=\begin{cases}\mu_1(y), & 0\le y\le 1,\\ \mu_2(y), & -1\le y\le 0,\end{cases}$ $\mu_2(x,y)-$ произвольные дважды непрерывно-дифференцируемые функция, $\mu_1(y)-$ произвольная непрерывно-дифференцируемая функция.

Без ограничения общности можно предполагать $\omega(0)=\omega'(0)=0$. Предполагается, что σ целиком лежит в полосе, ограниченной прямым $x=0,\ x=1.$

Без ограничения общности можно предполагать, что $\mu(0)=\mu'(0)=0$.

На основе (3) и (2) задача 2 редуцируется к определению регулярного решение (4) в области $D\ (y\ne 0)$ удовлетворяющего краевым условиям

$$\begin{gathered} z\big|_{\sigma}=f(\xi)-\mu_2(y),\ z\big|_{BE}=\psi_1(y)-\mu_1(y),\\ z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OA}=\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y),\\ z_x\big|_{AA_1}=\nu(y),\ \frac{\partial z}{\partial\eta}\Big|_{\sigma}=f_1(\xi)-\mu_1'(y)\frac{\partial y}{\partial n}. \end{gathered} \qquad (5)$$

Единственность решение задачи 2 следует из принципа экстремума. (Предполагается, что $\dfrac{\partial x}{\partial n}\ne 0$ вдоль дуги σ).

Определим $\nu_1(x)$. Поставляя значение $\nu_1(x)$ в формулу

$$z(x,y)=\int_0^1\nu_1(t)G(x,y;t,0)dt+\int_{3\pi/2}^{2\pi}\overline{f}(\theta)\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{|\xi|=1}d\theta-\int_{-1}^{0}\nu(t)G(x,y;0,t)dt$$

имеем

$$z(x,y)=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\mu_2(\sin\theta)\rho_1(x,y;\theta)d\theta+P(x,y), \qquad (6)$$

$\rho_1(x,y;\theta),\ P(x,y)-$ известные функции реализуя последнее условие из (5), для определения $\mu_2'(y)$ получаем сингулярное интегральное уравнение (3).

$$\delta(\theta_0)\sin\theta_0+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{\delta(\theta)}{\theta-\theta_0}d\theta-\frac{\sin\theta_0}{2\pi}\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_1(\theta,\theta_0)-K_1(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+$$
$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\frac{K_2(\theta,\theta_0)-K_2(\theta_0,\theta_0)}{\theta-\theta_0}\delta(\theta)d\theta+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}Q(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta+ \qquad (7)$$
$$+\frac{\cos\theta_0}{2\pi}\int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}Q_1(\theta,\theta_0)\delta(\theta)\cos\theta d\theta=\rho_2(\theta_0),$$

где $\delta(\theta)=\mu_2^{'}(\sin\theta);\ K_1(\theta,\theta_0),\ K_2(\theta,\theta_0),\ Q(\theta,\theta_0),\ Q_1(\theta,\theta_0)-$ известные функции.

Из уравнение (7) определим функцию $\mu_2(y)$. Таким образом, функция $u(x,y)$ полностью определяется в области D_2.

Решение уравнения (4), удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE}=\psi(y)-\mu_1(y),\ \ z\big|_{OB}=\tau(x),\ \ z_x\big|_{A_1B}=\nu(y)$$

определяется по формуле

$$z(x,y)=\int\limits_0^y\nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt-\int\limits_0^y[\psi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(x,y;1,t)dt-$$
$$-\int\limits_0^y\nu(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt, \qquad (8)$$

где $\overline{G}(x,y;\xi,\eta)-$ функция Грина.

Функция $z(x,y)$, определенная формулой (2) должна удовлетворять условию $z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y)$,

$$\varphi(y)-\mu_1(y)=\int\limits_0^y\nu(t)\overline{G}(0,y;0,t)dt-\int\limits_0^y\tau(t)\overline{G}(0,y;t,0)dt-$$
$$-\int\limits_0^y[\psi(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(0,y;1,t)dt. \qquad (9)$$

Реализуя условие $z\big|_{OA_1}=\psi(y)-\varphi(-y)-\mu_2(y)$ имеем

$$\psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y)=\int\mu_2(\sin\theta)\rho_1(0,y,\theta)d\theta+P(0,y). \qquad (10)$$

Поставляя значение $\varphi(y)$ в формулу (9) для определения $\mu_1(y)$, получаем интегральное уравнение Вольтерра второго рода

$$\mu_1(y)+\int_0^y K(y,t)\mu_1(t)dt = P_2(y), \qquad (11)$$

где $K(y,t),\ P_2(y)$ – известные функции.

Из уравнения (11) единственным образом определяется функция $\mu_1(y)$.

Задача 2 редуцируется к определению регулярного решение уравнения (5) удовлетворяющего краевым условиям

$$\left.\begin{aligned} &z\big|_{\sigma} = f(\xi)-\mu_2(y),\ z\big|_{x=e} = z\big|_{BE} = \varphi_1(y)-\mu_1(y),\\ &z\big|_{OA_1} = \varphi(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OA} = \psi(y)-\varphi(y)-\mu_2(y),\\ &z_x\big|_{AA_1} = \nu(y)\frac{\partial z}{\partial n}\Big|_{\sigma} = f_1(\xi)-\mu_2'(y)\frac{\partial z}{\partial n}. \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Через $\varphi(y),\ \varphi_1(y)$ обозначены соответственно значения $u(0,y),\ u(1,y)\ (0\le y\le 1)$.

Единственность решения задача 2 доказывается, используя принцип максимума в предположении, что $\dfrac{\partial x}{\partial n}\neq 0$ вдоль линии.

Существование решения задачи 2 области D_2 определяется как и в случае задачи 1 решение уравнение (5) удовлетворяющее краевым условиям

$$z\big|_{BE} = \varphi_1(y)-\mu_1(y),\ z\big|_{OB} = \tau(x),\ z_x\big|_{OA_1} = \nu(x),$$

дается формулой

$$\begin{aligned} z(x,y) &= \int_0^y \nu(t)\overline{G}(x,y;0,t)dt - \int_0^1 \tau(t)\overline{G}(x,y;t,0)dt -\\ &-\int_0^y [\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_{\xi}(x,y;1,t)dt, \end{aligned} \qquad (13)$$

$z(x,y)$ должно удовлетворять условию

$$z\big|_{z=e} = \varphi_1(y)-\mu_1(y),$$

$$\begin{aligned} &\varphi_1(y)-\mu_1(y)+\int_0^y [\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_{\xi}(e,y;1,t)dt =\\ &= \int_0^y \nu(t)\overline{G}(e,y;0,t)dt - \int_0^1 \tau(t)\overline{G}(e,y;t,0)dt. \end{aligned} \qquad (14)$$

Интегральное уравнения (14) является интегральным уравнением Вольтерра второго рода, из которого единственном образом определяется $\varphi_1(y)-\mu_1(y)$.

Реализуя условие $z\big|_{OA_1}=\varphi(y)-\mu_1(y)$ из (13) найдем

$$\mu_1(y)=\varphi(y)+\int_0^y[\varphi_1(t)-\mu_1(t)]\overline{G}_\xi(e,y;1,t)dt+ \\ +\int_0^1\tau(t)G(e,y;t,0)dt+\int_0^1\nu(t)\overline{G}(e,y;0,t)dt. \quad (15)$$

Поставляя значение $\varphi(y),\varphi_1(y)-\mu_1(y)$ в формулу (15) определим функцию $\mu_1(y)$, где $\varphi(y)$ находится из формулы (8).

REFERENCES

1. Врагов В.И. Об одном уравнении смешанного – составного типа диф. урав. 1973. Т IX, №1. Стр. 169-171.
2. Михлин С.Г. Интегральные уравнения. ОГИЗ. Гостехиздат. 1949.
3. Муминов, Ф. М., & Душатов, Н. Т. (2021). НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, *2*(5), 191-196.
4. Муминов, Ф. М., & Миратоев, З. М. (2021). О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения.«. *Scientific progress*, *1*(6), 922-927.
5. Муминов, Ф. М., Миратоев, З. М., & Утабов, У. А. (2021). Об Одной Краевой Задаче Для Уровнениясоставного Типа Третьего Порядка. *CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES*, *2*(4), 17-22.
6. Сраждинов, И. Ф. (2021). Начально-краевая задача для одной системы составного типа. *Matematika Instituti Byulleteni Bulletin of the Institute of Mathematics Бюллетень Института*, *4*(2), 90.
7. Srazhdinov I.F. To investigation of the mixed problem for system of equations of composite type. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF THEORETICAL & APPLIED SCIENCES. April 2021. Vol.02, Issue 04. стр.23-32.