ПРОБЛЕМА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Миратоев З.М.
Islom Karimov nomidagi Toshkent davlat texnika universiteti Olmaliq filiali
E-mail:miratoyev2014@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В данной статье рассматривается нестандартная краевая задача для одного нелинейного уравнения, имеющего широкий спектр приложений в различных областях науки и техники. Объектом изучения является нелокальная краевая задача, которая отличается от традиционных задач по наличию нестандартных условий на границе области. Основной целью работы является исследование существования и свойств решений данной нелинейной краевой задачи, а также разработка эффективных методов их численного решения.

***Ключевые слова**: Нелокальная краевая задача, Неклассическое уравнение, Нелинейное уравнение, Краевая задача с нестандартными условиями, Существование и единственность решений, Численные методы решения, Устойчивость решений, Анализ математической постановки.*

I. ВВЕДЕНИЕ

Не локальные краевые задачи для нелинейных уравнений привлекают все большее внимание в современной математике и ее приложениях. Эти задачи представляют собой значительное расширение классического подхода к краевым задачам, требуя учета влияния не только граничных условий, но и нелинейных не локальных эффектов на решения уравнений.

Краевые задачи для нелинейных уравнений играют важную роль в различных областях науки и техники, таких как физика, биология, экономика и инженерия. Они представляют собой математические модели реальных процессов, в которых учитываются сложные взаимодействия и нелинейные явления.

В данном контексте, не локальные краевые задачи выделяются своей способностью учитывать не только локальные свойства системы, но и эффекты, распространяющиеся на всей области определения уравнения. Это делает их более реалистичными в моделировании широкого спектра физических и биологических процессов, таких как распространение тепла, распространение популяций, реакции диффузии, и многие другие.

В данном исследовании мы обращаемся к одной из таких задач - не локальной краевой задаче для одного не классического уравнения.

Данное исследование представляет собой важный шаг в понимании и развитии методов решения нестандартных краевых задач, имеющих широкое практическое применение и теоретический интерес.

II. Математическая постановка задачи

Формулировка нелинейного уравнения и условий на границе

Рассмотрим уравнение:

$$LU = K(x;y)\,U_{yy} + U_{xx} + \alpha(x;y)\,U_y + b(x;y)U + m|u|^{\rho}U = f(x;y) \qquad (1)$$

Где K(x,y)–непрерывно дифференцируемая функция , причем $K(x,y)\ge 0$ при $y\ge 0, K(x,y)<0$ при $y<0,\ a(x,y)\in \bar{C}(D), b(x,y)\in C^1(\bar{D})\ , m<0,\ p>0$

Область D– которая состоит при y>0 из прямоугольника с вершинами в точках A(0; 0), B(1;0), A_1(0;1), B_1(1;1), а при y<0 ограничена характеристиками уравнения (1)

$$S_1 = \left\{(x;y): \frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K}, y(0)=0, y<0\right\}$$

$$S_2 = \left\{(x;y): \frac{dx}{dy} = -\sqrt{-K}, y(0)=0, y<0\right\}$$

Положим $S = S_1 \cup S_2$

Краевая задача. Найти решение уравнения (1) в области D такое, что

$$U(0;y) = U(1;y) = 0 \qquad (2)$$

$$U(x;1) = \beta(x)\,U(x;y)/_S \qquad (3)$$

Всюду ниже предполагается что, y∈S. $\beta(x) = \exp\left[\frac{\lambda}{p+2}(-1+y)\right], \lambda>0, y\in S.$

Где y<0 Через $W_2^1(D)$ обозначим под пространство функций из пространства $W_2^1(D)$ которые удовлетворяют краевым условиям (2)-(3)

Определение 1. Функции и $(x;y)\in W_2^1(D)$) называется обобщенным решением задачи (1)-(3), если выполнено интегральное тождество.

$$\int_d \left[-U_y(KV)_Y - U_xV_x + a(x;y)U_yV + bUY + m|U|^{\rho}UV\right]dD = \int_D fVdD$$

для любой функции V из $\overset{0}{W}{}_2^1(D)$.

Существование обобщенного решения краевой задачи (1)-(3) установим с помощью метода Галеркина. Пусть $\{\varphi_n(x,y)\}$ –множество функций из пространства $W_2^1(D)$ обладающее тем свойством , что все $\varphi_n(x,y)$ линейно независимы , а их линейные комбинации плотны в этом пространстве. Такое множество, как известно [1], [4] существует.

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$lW_n = e^{-\lambda y} W_{ny}(x;y) = \varphi_n(x;y) \qquad (5)$$

$$W_n(x;1) = \beta(x) W_n(x;y) \Big/_S \qquad (6)$$

Решение задачи (5)-(6)

$$W_n(x,y) = \int_s^y e^{\lambda\tau} \varphi_n(x;\tau)dt + \frac{1}{\beta - 1} \int_S e^{\lambda t} \varphi_n(x;t)dt$$

Ясно, что $W_n(x,y)$ линейно независимы. Действительно, если $\sum_{n=1}^{N} C_n W_n = 0$ для какого-нибудь набора W_1, W_2, …, W_n то действуя на эту сумму оператором L, имеем

$$\sum_{n=1}^{N} C_n \varphi_n(x;y) = 0 \Rightarrow C_n = 0, \forall n$$

Ясно, что $W_n(x;y) \in W_2^1(D)$ нетрудно получить оценку

$$\|W_n\|_{L_{P(D)}}^{P} \le m \|\varphi_n\|_{L_P(D)}^{P}$$

Кроме того $W_n(x,y)$ удовлетворяет условиям (6) для любого n. Приближенное решение задачи (1)-(3) будем искать в виде

Где C_n постоянные, которые определяются из системы нелинейных алгебраических уравнений виде

$$(LU_{,}^{N} U_n)_0 = (f_{,} U_n)_0, n = 1, N \qquad (7)$$

Разрешимость этой системы алгебраических уравнений следует из получаемых ниже априорных оценок для приближенных решений и [4] леммы «об остром угле»

Лемма 1. Пусть выполнены условия $K(x;1) \ge 0$ и неравенства

$$2a(x;y) - K_y(x;y) - \lambda K(x;y) \ge \delta > 0$$

Тогда справедлива оценка

$$\left\|U^N\right\|_{W_2^1(D)}^{2} + \left\|U^N\right\|_{L_p(D)}^{p} \le K_2 \qquad (8)$$

K_2 не зависит от n.

Доказательство. Умножим (7) на Cn суммируя по n от 1 до N получим тождество

$$\int_D e^{\lambda y} U_y^N LU^N dD = \int_D e^{\lambda y} U_y^N f dD \qquad (9)$$

Интегрируя левую часть равенство (9) но частям, получаем

$$\left[\lambda(U_y^N)^2+(2a-\lambda K-Ky)(U_x^N)^2++\lambda(U^N)^2+\frac{2m}{p}\left\|U^N\right\|^P\right]dD-$$

$$-\frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1(U_x^N)^2dx+\frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1K(x;1)(U_y^N)^2dx-\frac{e^{\lambda}}{2}\int_0^1(U^N)^2dx+\frac{1}{2}\int_S e^{\lambda y}\left[((U_y^N)^2-K(U_y^N)^2+m\left|U^N\right|^p+(U^N)^2)n_1-2(U_x^N)(U_y^N)n_2\right]ds$$

Где n=(n1 n2)– единичный вектор внутренний нормали к ∂D. Используя условия (3) и условия леммы получим неравенство (8). Вернемся к вопросу о разрешимости системы уравнений (7). Если записать ее в виде $\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C})=0$, где $\vec{C}=(C_{1_m}.....C_{n_m})$ то как мы только что убедились умножая $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}),\overrightarrow{C})_0$ получаем оценку $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}),\overrightarrow{C})_0\geq K_0\left\|U^N\right\|^2_{w_2^1(D)}-K_1$

В силу того, что линейная оболочка $L(\mathrm{W}_1,\mathrm{W}_2,......\mathrm{W}_m)$ есть конечномерное пространство, существует $K_2(m)$ такое, что значить, выполнено неравенство $(\overrightarrow{F_m}(\overrightarrow{C}),\overrightarrow{C})_0\geq K_2(m)\sum_{S=1}^{N}C_S^2-K_1\geq 0$

Если $\vec{C}$ достаточно больщая величина

А это условие “острого угла”, достаточное для разрешимости системы уравнений (7).

Теорема. Пусть выполнены условия леммы. Тогда для любой функции $f(x;y)\in L_2(D)$ существует обобщенное решение задачи (1)–(3).

Доказательство. В силу оценки (8), последовательность $\left\{\left|U^N\right|^p U^N\right\}$ ограничено в пространстве L_q где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Тогда на основании (8) из последовательности $\{U^N\}$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся слабо в $\mathrm{W}_2^1(D)$ к некоторой функции U(x,y) и последовательности $\left|U^N\right|^p U^N$ слабо сходится в Lq(D) к функции q$(x;y)$ $\left|U^N\right|^p U^N\to q(x;y)$ в L_q

Однако, но теореме вложение $\mathrm{W}_2^1(D)$ в $L_2\ (D)$ вполне непрерывно. Следовательно, мы можем считать, что подпоследовательность $U^N(x;y)$ сильно в $L_2\ (D)$ и почти всюду. Теперь применим лемму 1 из [2], [4] о предельной переходе в нелинейном члене в случае, когда из нее следует, что

$$q(x,y)=|U|^p U$$

Далее, переходя к пределу при $N\to\infty$ в (7) при фиксированном n, будем иметь равенство

$$\int_D \left[-U_y (K\varphi_n)_y - U_x\varphi_n + \alpha U\varphi_n + \beta(x;y)U\varphi_n + m|U|^p U\varphi_n \right] dD = \int_D f\varphi_n dD$$

Где функции $U(x;y)$ принадлежит $W_2^1(D)$. Отсюда в виду плотности $\{\varphi_n\}$ в пространстве $W_2^1(D)$ следует, что интегральное тождество $|4|$ справедливо для любой $V(x;y) \in \overset{0}{W}{}_2^1(D)$ теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ (REFERENCES)

1. Врагов В.И. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск: НГУ, 1983, 84с.
2. Врагов В.И. Об одной уравнений смешанно-составного типа.
3. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа. Central Asian Journal of mathematical theory and computer sciences. 2021. Issue: 04. April. ISSN:2660-5309.
4. Муминов Ф.М., Душатов Н.Т. О нелокальной краевой задачи для линейных уравнений смещенного типа. Central Asian Journal of theoretical and applied sciences. 2021. Vol.02/ Issue: 05. may. ISSN:2660-5309.
5. Fayzudinovich, S. I. (2021). To Investigation of The Mixed Problem For Systems of Equations of Compound Type. Central Asian Journal of Theoretical and Applied Science, 2(4), 23-32.
6. Сраждинов, И. Ф. (2021). Начально-краевая задача для одной системы составного типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(3), 41-47.
7. Сраждинов, И. Ф. (2021). Смешанная Задача Для Одной Особой Системы Составного Типа С Коэффициентом Чебышева-Эрмита. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES, 2(10), 47-52.
8. Муминов, Ф. М., Душатов, Н. Т., Миратоев, З. М., & Ибодуллаева, М. Ш. (2022). ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА СМЕШАННО-СОСТАВНОГО ТИПА. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, 2(6), 606-612.