Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Research BIB / Index Copernicus
(E)ISSN: 2181-1784
6(4), 2026
www.oriens.uz

ГЕОМЕТРИЯ ОРБИТЫ НЕКОТОРЫХ СЕМЕЙСТВ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Ражабов Элдор Одилбековича[a,b],
Нурбоева Махлиё Бахтиёровна[c],
Исломов Лазизбек Тулкин угли[c]
a) Ташкентский международный университет финансового менеджмента и технологий, PhD, доцент, rajabov_2019@bk.ru.,
b) Государственный университет «Cyber University»Cyber University
c) Ташкентский международный университет финансового менеджмента и технологий, направление математика, магистрант.

АННОТАЦИЯ

В данной работе изучается геометрия орбит, порожденных семействами конформных векторных полей на римановых многообразиях. Конформное векторное поле определяется как векторное поле, для которого производная Ли метрического тензора пропорциональна самому тензору. Показано, что семейства таких векторных полей порождают сингулярные слоения, слои которых являются гладкими поверхностями нулевой кривизны.

Ключевые слова: *Риманово многообразие, конформные векторные поля, орбита, сингулярное слоение, инвариантные функции, производная Ли, однопараметрическая группа, конформные преобразования, нулевая кривизна.*

GEOMETRY OF ORBITS OF CERTAIN FAMILIES OF VECTOR FIELDS

Rajabov Eldor Odilbekovich,
Nurboyeva Mahliyo Baxtiyorovna,
Islomov Lazizbek Tulqin o‘g‘li
Tashkent International University of Financial Management and Technologies, PhD, Associate Professor, rajabov_2019@bk.ru.
Tashkent International University of Financial Management and Technologies, Department of Mathematics, Master’s student.

ABSTRACT

This paper investigates the geometry of orbits generated by certain families of vector fields on Riemannian manifolds. In particular, attention is given to conformal vector fields, which are defined as vector fields for which the Lie derivative of the metric tensor is proportional to the tensor itself. It is shown that families of such *vector fields give rise to singular foliations, the leaves of which are smooth surfaces of zero curvature.*

Keywords: *Riemannian manifold, conformal vector fields, orbit, singular foliation, invariant functions, Lie derivative, one-parameter group, conformal transformations, zero curvature.*

Пусть M – гладкое риманово многообразие размерности n с метрическим тензором g , D -семейство гладких векторных полей заданных на многообразии M . Семейство D может содержать конечное и бесконечное число гладких векторных полей.

Определение-1. Орбита $L(\text{p})$ семейства D векторных полей, проходящая через точку p из M , определяется как множество таких точек q из M , для которых существуют действительные числа $t_1, t_2, ..., t_k$ и векторные поля $X_i, X_2, ..., X_k$ из D (где k произвольное натуральное число) такие, что

$$q = X_{i_k}^{t_k}(X_{i_{k-1}}^{t_{k-1}}(...(X_{i_1}^{t_1}(\text{p}))...))$$

Ясно, что орбита является гладкой кривой (одномерным многообразием), если состоит из одного векторного поля.

Известно, что разбиение многообразия на орбиты являются сингулярным слоением. Если размерности всех орбит одинаковы, то это разбиение является регулярным слоением.

В этой работе изучим геометрию орбит некоторых конформных векторных полей. Говорят, что векторное поле X на M конформно, если $L_X g = \sigma g$, где σ есть функция на M , $L_X g$ – производная Ли. Известно, что векторное поле X на M является конформным тогда и только тогда, когда локальная однопараметрическая группа локальных преобразований, порожденная векторным полем X , состоит из конформных преобразований.

Изучению геометрии конформных векторных полей посвящены многочисленные исследования [1-3],[5].

Определение-2. Пусть G – группа преобразований, действующая на многообразии M . Подмножество $N \subset M$ называется G – инвариантным, а группа G называется группой симметрии подмножества N, если для любых $x \in N$ и $g \in G$, $g \cdot x \in N$.

Определение-3. Пусть G – группа преобразований, действующая на многообразии M. Функция $F : M \to \mathbb{R}$, называется инвариантной функцией группы преобразований, если для всех $x \in M$ и всех $g \in G$, $F(g \cdot x) = F(x)$.

Известна следующая теорема[3].

(E)ISSN: 2181-1784
6(4), 2026
www.oriens.uz

Теорема-1. Пусть группа $G-$ действует на многообразии M и $F: M \to \mathbb{R}$ $-$гладкая функция. Тогда F являетя инвариантной функцией, тогда и только тогда, когда каждое множество уровня $\{x \in M : F(x) = c, c \in \mathbb{R}\}$ будет $G-$инвариантным подмножеством многообразия M.

Векторное поле записывают в виде дифференциального оператора первого порядка

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad (1)$$

где $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Векторное поле (1) называется инфинитезимальным образующим однопараметрический группы преобразований G, а в физической литературе часто встречается термин генератор группы.

Известно следующий теорема[3].

Теорема-2. Функция $F(x)$ является инвариантом тогда и только тогда когда она удовлетворяет уравнению $X(F) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \dfrac{\partial F}{\partial x_i} = 0.$

Пусть $D = \{X_1, X_2\}$ семейство гладких векторных полей в R^3, где $X_1 = \{x, y, z\}$, $X_2 = \{-y + \alpha x, x + \alpha y, \alpha z\}$, α- действительное число. Векторное поле $X_1 = \{x, y, z\}$ порождает следующую однопараметрическую группу конформных преобразований

$$X^t : (x, y, z) \to \{xe^t, ye^t, ze^t\}, \ t \in R$$

Поток векторного поля $X_2 = \{-y + \alpha x, x + \alpha y, \alpha z\}$ состоит из следующих конформных преобразований пространства

$$X^s : (x, y, z) \to \{e^{\alpha s}(x\cos s - y\sin s), e^{\alpha s}(x\sin s + y\cos s), ze^{\alpha s}\}, \ s \in R$$

Изучим геометрию орбит этих векторных полей.

Теорема-3. Орбиты семейства D векторных полей порождают сингулярное слоение, слои которого являются поверхностями нулевой кривизны.

Доказательство. Начало координат является неподвижной точкой относительно конформных преобразований порожденными векторными полями X_1, X_2. Поэтому начало координат является одной из орбит.

Берем точку $(0,0,z_0)$ из множество $L_2 = \{(0,0,z) : z > 0\}$ (или $L_3 = \{(0,0,z) : z < 0\}$), тогда точки $X_1^t(0,0,z) = (0,0,ze^t), X_2^s(0,0,z) = (0,0,ze^{\alpha s})$.

(E)ISSN: 2181-1784
6(4), 2026
www.oriens.uz

также принадлежит множеству L_2 (или L_3). Кроме того из точки $(0,0,z_0)$ можем попасть в любую точку $(0,0,z)$ множества $L_2=\{(0,0,z):z>0\}$. Следовательно, множества L_2, L_3 являются орбитами.

$$L_4=\{(x,y,0):x^2+y^2>0\},$$

$$L_5=\left\{\frac{x^2+y^2}{z^2}=c:z>0,\, c\in R^{>0}\right\},$$

$$L_6=\left\{\frac{x^2+y^2}{z^2}=c:z<0,\, c\in R^{>0}\right\}.$$

Берем точку $(x,y,0)$ из множество $L_4=\{(x,y,0):x^2+y^2>0\}$, тогда $X_1^t(x,y,0)=(xe^t,ye^t,0), X_2^s(x,y,0)=\left(e^{\alpha s}(x\cos s - y\sin s),e^{\alpha s}(x\sin s+y\cos s),0\right)$ тоже принадлежит множеству $L_4=\{(x,y,0):x^2+y^2>0\}$.

Берем две произвольные точки из множества L_4, т.е. $A(x_1,y_1,0),\ B(x_2,y_2,0)\in L_4$. Покажем, что найдутся такие параметры t,s, что выполняются следующие равенство

$$X^s\left(X^t(x_1,y_1,0)\right)=(x_2,y_2,0)$$

Это соотношение перепишем координатном виде:

$$\begin{cases} x_1e^te^{\alpha s}\cos s - y_1e^te^{\alpha s}\sin s = x_2 \\ x_1e^te^{\alpha s}\sin s + y_1e^te^{\alpha s}\cos s = y_2 \end{cases}$$

Так как, $x_i^2+y_i^2>0,\ i=1,2$ можем, делит первое уравнение на второе уравнение системы

$$\frac{x_1\cos s - y_1\sin s}{x_1\sin s + y_1\cos s}=\frac{x_2}{y_2} \quad \text{(или } \frac{x_1\sin s + y_1\cos s}{x_1\cos s - y_1\sin s}=\frac{y_2}{x_2}\text{)}.$$

Отсюда находим:

$$\frac{y_2x_1-x_2y_1}{x_2x_1+y_1y_2}=\operatorname{tg}s.$$

Из первого уравнение находим значение параметра t:

$$t=\ln\frac{x_2}{x_1\cos s - y_1\sin s}-\alpha s.$$

Значит, существует значения параметров t,s, т.е. от любой точки $A(x_1,y_1,0)\in L_4$ с помощью потоков векторных полей $X_1=\{x,y,z\}$,

(E)ISSN: 2181-1784
6(4), 2026
www.oriens.uz

$X_2=\{-y+\alpha x, x+\alpha y, \alpha z\}$ может, переместится в любую другую точку $B(x_2,y_2,0)\in L_4$.

Фунция $F(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ является инвариантной функцией,что вытекает из равенства $X_1(F)=0$, $X_2(F)=0$. По известной теореме все множества уровня функции $F(x,y,z)$ являются инвариантными множествами преобразований, порожденных векторными полями $\mathrm{X}_1,\mathrm{X}_2$.

Поверхность уровня $\dfrac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\mathrm{z}^2}=c:\mathrm{z}>0,\ c\in R^+$ является верхней частью конуса с выколотой вершиной.

Берем две произвольные точки из множества L_5 , т.е. $A(x_1,y_1,z_1),\ B(x_2,y_2,z_2)\in L_5$. Покажем, что найдутся такие параметры t,s , что выполняются следующие равенство

$$X^s\left(X^t\left(x_1,y_1,z_1\right)\right)=\left(x_2,y_2,z_2\right)$$

Это соотношение перепишем координатном виде:

$$\begin{cases} x_1e^te^{\alpha s}\cos s-y_1e^te^{\alpha s}\sin s=x_2\\ x_1e^te^{\alpha s}\sin s+y_1e^te^{\alpha s}\cos s=y_2\\ z_1e^te^{\alpha s}=z_2\end{cases}$$

С третьего уравнения этой системы получим следующее равенство :

$$t=\ln\frac{z_2}{z_1}-\alpha s.$$

Подставляя это выражение для в первое и второе уравнения системы получим:

$$\begin{cases}\dfrac{z_2}{z_1}e^{-\alpha s}e^{\alpha s}(x_1\cos s-y_1\sin s)=x_2\\ \dfrac{z_2}{z_1}e^{-\alpha s}e^{\alpha s}(x_1\sin s+y_1\cos s)=y_2\end{cases}$$

Так как, $x_i^2+y_i^2>0,\ i=1,2$ можем, делит первое уравнение на второе уравнение системы

$$\frac{x_1\cos s-y_1\sin s}{x_1\sin s+y_1\cos s}=\frac{x_2}{y_2}\quad (\text{или } \frac{x_1\sin s+y_1\cos s}{x_1\cos s-y_1\sin s}=\frac{y_2}{x_2}).$$

Отсюда находим:

$$\frac{y_2x_1 - x_2y_1}{x_2x_1 + y_1y_2} = \operatorname{tg} s.$$

Значит, существует значения параметров t, s, т.е. от любой точки $A(x_1, y_1, z_1) \in L_5$ с помощью потоков векторных полей $X_1 = \{x, y, z\}$, $X_2 = \{-y + \alpha x, x + \alpha y, \alpha z\}$ может, переместится в любую другую точку $B(x_2, y_2, z_2) \in L_5$.

Известно что, множество L_1 является точкой, множества L_2, L_3 являются лучами, множество L_4 является плоскостью с дыркой, множества L_5, L_6 являются конусами без вершин. Поэтому орбиты семейства D векторных полей порождают сингулярное слоение, слои которого являются поверхностями нулевой кривизны. Теорема доказано.

Если эти векторные поля рассмотрим на многообразии

$$M = R^3 \setminus \{(x, y, z) : x = 0, y = 0\},$$

то получим следующую теорему.

Теорема-4. Орбиты семейства D векторных полей на многообразии M порождают двумерное слоение, слои которого являются поверхностями нулевой кривизны.

Доказательство. Из теоремы 3 известно что, орбита семейство D порождает множества L_i, $i = 1, \ldots, 6$. Так как рассматриваем многообразию M, тогда орбита состоит из множеств L_i, $i = 4, 5, 6$. Размерности этих множеств равен двум. Поэтому орбиты семейства D векторных полей на многообразии M порождают двумерное слоение. Теорема доказано.

ЛИТЕРАТУРА

1. Blair D.E. On the zeros of a conformal vector field. Nagoya Mathematical Journal .V. 55 (1974), 1- 3.
2. Ferrand J. The action of conformal transformations on a Riemannian manifold // Math. Ann. 1996. V. 304, N 2. P. 277–291.
3. Obata M. The conjectures on conformal transformations of Riemannian mani-folds // J. Differ. Geom. 1971. V. 6, N 2. P. 247–258.
4. *Sussman H.* Orbits of families of vector fields and integrability of distributi-ons // Transactions of the AMS. 1973. V. 180. № 6. P. 171–188.
5. *Нарманов А.Я.,Саитова С.* О геометрии орбит векторных полей Кил-линга // Дифференциальные уравнения. 2014, Т. 50, № 12, С. 1582–1589.