

BA'ZI FUNKSIYALAR UCHUN BIFURKATSIYALAR

Mavluda Ikrambayevna Islamova

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti o'qituvchisi

m.islamova@tsue.uz

Kutlimuratov Ravshanbek Rozboyevich

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti o'qituvchisi

rqtlimurotov@tsue.uz

Asqar Jaxangirovich Ismailov

Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti o'qituvchisi

aismoilov@tsue.uz

ANNOTATSIYA

Bu qismda biz $Q_c(x) = x^2 + c$ funksiyalarning kvadrat oilasini o'rganishni boshlaymiz, bu yerda c -o'zgarmas. Biz bu funktsiyani oddiy deb qarayotganimizda biz uning dinamikasi hayratlanarli darajada murakkab ekanini ko'ramiz. Haqiqatdan ham, bu natija faqatgina 1990-yillarda butunlay o'rganilgan. Bu bobimiz $Q_c(x) = x^2 + c$ haqidagi hikoyamizning boshlanishi xolos, hamda dinamik sistemaga aloqasi – bu kitobning qolgan qismi uchun bizning e'tiborimizni jalb qiladi. Bu yerda biz dinamikada uchraydigan bifurkatsiyaning eng muhim 2 turini ko'rib o'tamiz. Qolgan turlarini keyinroq ko'ramiz.

***Kalit so'zlar:** bifurkatsiyalar, qo'zg'almas nuqtalar, tortuvchi, itaruvchi, neytral, lokal bifurkatsiya, tangens bifurkatsiya, global bifurkatsiya.*

Kvadrat akslantirishlar turlari

Bu bob davomida biz $Q_c(x) = x^2 + c$ kvadrat funksiyalar oilasini $Q_c(x)$ bilan belgilaylik. c raqami esa parametr deyiladi, bunda biz har bir c uchun turli xil Q_c dinamik sistemaga ega bo'lamiz. Bizning maqsadimiz c o'zgarganda Q_c ning o'zgarish dinamikasi qanday bo'lishini tushunishdan iborat.

Odatdagiday, bizning birinchi ishimiz Q_c ning qo'zg'almas nuqtalarini topishdan iborat. Demak, biz quyidagi kvadrat tenglamaning yechimlarini topamiz:

$$x^2 + c = x$$

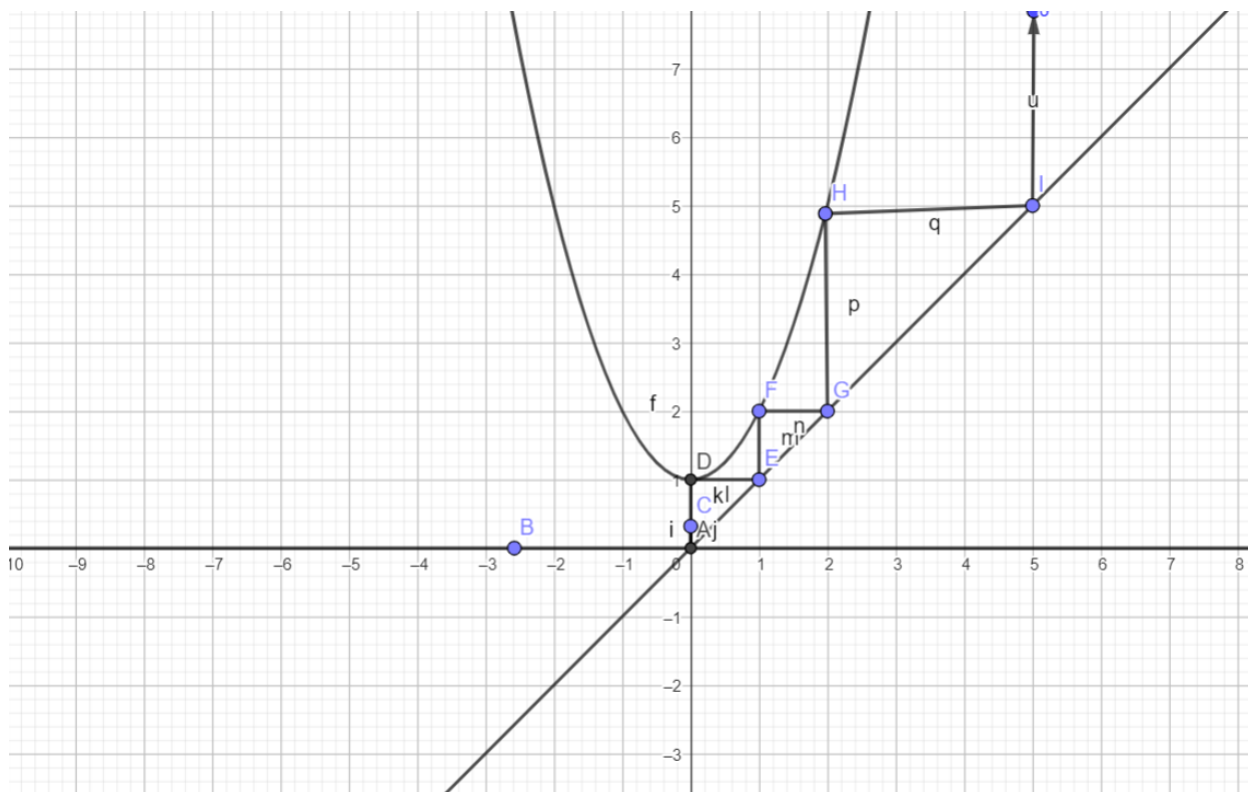
U holda quyidagi 2 yechimga ega bo'lamiz:

$$p_+ = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 - 4c})$$

$$p_- = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 - 4c})$$

Bular Q_c uchun 2ta qo'zg'almas nuqtalar bo'ladi.

Shuni esda tutish kerakki, p_+ va p_- lar haqiqiy sonlar bo'ladi, agar $1-4c \geq 0$, bundan $c \leq \frac{1}{4}$ bo'lsa. Demak, $c > \frac{1}{4}$ bo'lganda Q_c haqiqiy sonlar o'qida qo'zg'almas nuqtaga ega emas. Agar, $c = \frac{1}{4}$ bo'lsa, $1-4c = 0$ bo'ladi, u holda $p_+ = p_- = \frac{1}{2}$ bo'ladi. Nihoyat, $c < \frac{1}{4}$, $1-4c > 0$ bo'lganda, p_+ va p_- lar haqiqiy va aniq bo'ladi. Shuni esda tutish kerakki, bu yerda $p_+ > p_-$ bo'ladi.



$Q_c(x) = x^2 + c$ ning barcha trayektoriyalari $c > \frac{1}{4}$ bo'lganda cheksizlikka ketadi.

Dastlab, $c > \frac{1}{4}$ ni ko'rib chiqamiz. Q_c ning grafigi shoxlari yuqoriga qaragan parabola bo'ladi. Agar $c > \frac{1}{4}$ bo'lsa, grafik $y = x$ diagonal chiziq bilan kesishmaydi. Shu tarzda grafik analiz shuni ko'rsatadiki, Q_c ning orbitasi $c > \frac{1}{4}$ bo'lganda cheksizlikka ketadi. Yuqoridagi grafikdan biz buni butunlay tushunishimiz mumkin.

Agar $c \frac{1}{4}$ dan pastga tushadigan bo'lsa, bu vaziyat o'zgarishi – biz bu yerda bizning ilk *bifurkatsiyamizga* duch kelamiz. Bifurkatsiya ikki qismga bo'linishni anglatadi, bo'linish va Q_c ning qo'zg'almas nuqtasi bilan aynan shunday bo'ladi.

$c > \frac{1}{4}$ bo'lganda Q_c qo'zg'almas nuqtaga ega emas, $c = \frac{1}{4}$ bo'lganda Q_c aniq bitta qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi; lekin $c < \frac{1}{4}$ bo'lganda bu qo'zg'almas nuqta ikkiga ajraladi, birinchisi p_+ va ikkinchisi p_- . Keyingi qismda biz bu turdagi bifurkatsiyani *lokal* yoki *tangens bifurkatsiya* deb nomlaymiz va yanada to'liqroq tasvirlaymiz.

O'tgan bobning natijalaridan foydalansak, biz $p_{\pm}$ qo'zg'almas nuqtani tortuvchi, itaruvchi yoki neytral ekanligini tekshirishimiz mumkin. $Q'_c(x) = 2x$ ekanidan, biz quyidagini topishimiz mumkin:

$$Q'_c(p_+) = 1 + \sqrt{1 - 4c}$$

$$Q'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 - 4c}.$$

Agar $c = \frac{1}{4}$, bo'lsa $Q'_c(p_+) = 1$ ekanligini eslatib o'tamiz, lekin $c < \frac{1}{4}$ bo'lganda bu c o'zgaruvchi uchun $\sqrt{1 - 4c} > 0$ bo'lganidan $Q'_c(p_+) > 1$ bo'ladi. Shuning uchun p_+ $c = \frac{1}{4}$ bo'lganda neytral qo'zg'almas nuqta, lekin $c < \frac{1}{4}$ bo'lganda esa itaruvchi bo'ladi.

p_- bo'lgan holatda esa biroz murakkabroq. Ma'lumki, $c = \frac{1}{4}$ bo'lganda $Q'_c(p_-) = 1$ (bu yerda, albatta, $p_- = p_+ = \frac{1}{2}$). Agar $c < \frac{1}{4}$ dan biroz pastlasa, $Q'_c(p_-) < 1$ bo'ladi, shunday qilib p_- tortuvchi bo'la boshlaydi. $|Q'_c(p_-)| < 1$ uchun barcha c - qiymatlarni topish uchun biz quyidagi tengsizlikni yechishimiz kerak:

$$-1 < Q'_c(p_-) < 1$$

yoki

$$-1 < 1 - \sqrt{1 - 4c} < 1$$

Bularni yechsak quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi

$$2 > \sqrt{1 - 4c} > 0$$

$$4 > 1 - 4c > 0$$

$$-3/4 < c < 1/4$$

Shunday qilib, p_- $-3/4 < c < 1/4$ oraliqda Q_c uchun tortuvchi qo'zg'almas nuqta hisoblanadi. $c = -3/4$ bo'lganda buni tekshirish oson, $Q'_c(p_-) = 1 - \sqrt{1 + 3} = -1$, shuning uchun p_- neytral. Agar $c < -3/4$ bo'lsa, $Q'_c(p_-) < -1$, shuning uchun p_- itaruvchi.

Keling, bu natijalarni quyidagi mulohazaga jamlaymiz.

Mulohaza. Birinchi bifurkatsiya. $Q_c(x) = x^2 + c$ oilasi uchun:

1. Agar $c > 1/4$ bo'lsa, barcha orbitalar cheksizlikka intiladi.

2. Agar $c = 1/4$ bo'lsa, $p_+ = p_- = 1/2$ bo'lgan yagona qo'zg'almas nuqta bor va u neytral.

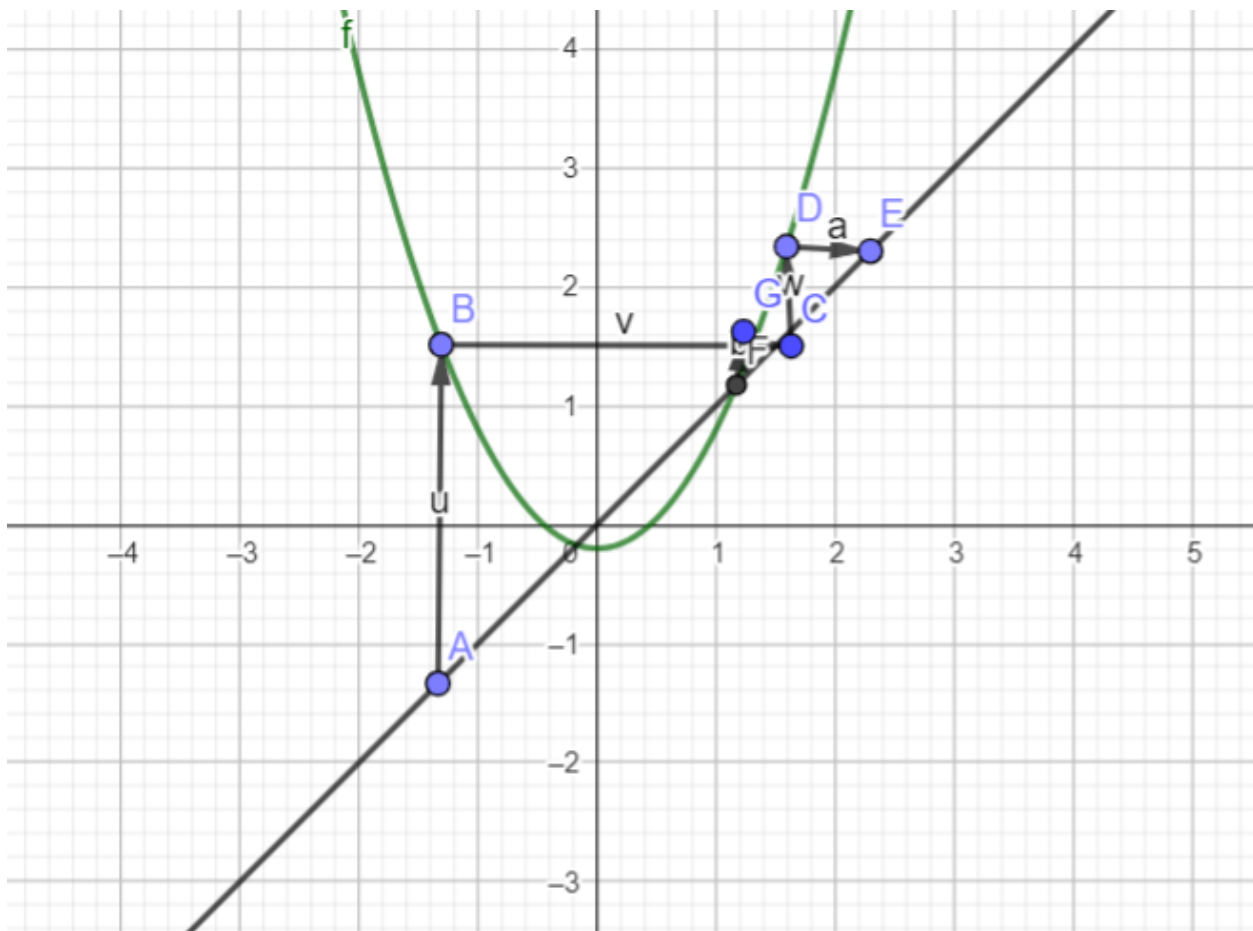
3. $c < 1/4$ bo'lganda, Q_c p_+ va p_- bo'lgan ikkita qo'zg'almas nuqtaga ega. p_+ qo'zg'almas nuqta har doim itaruvchi.

a. Agar $-3/4 < c < 1/4$ bo'lsa, p_- tortuvchi bo'ladi.

b. Agar $c = -3/4$ bo'lsa, p_- neytral bo'ladi.

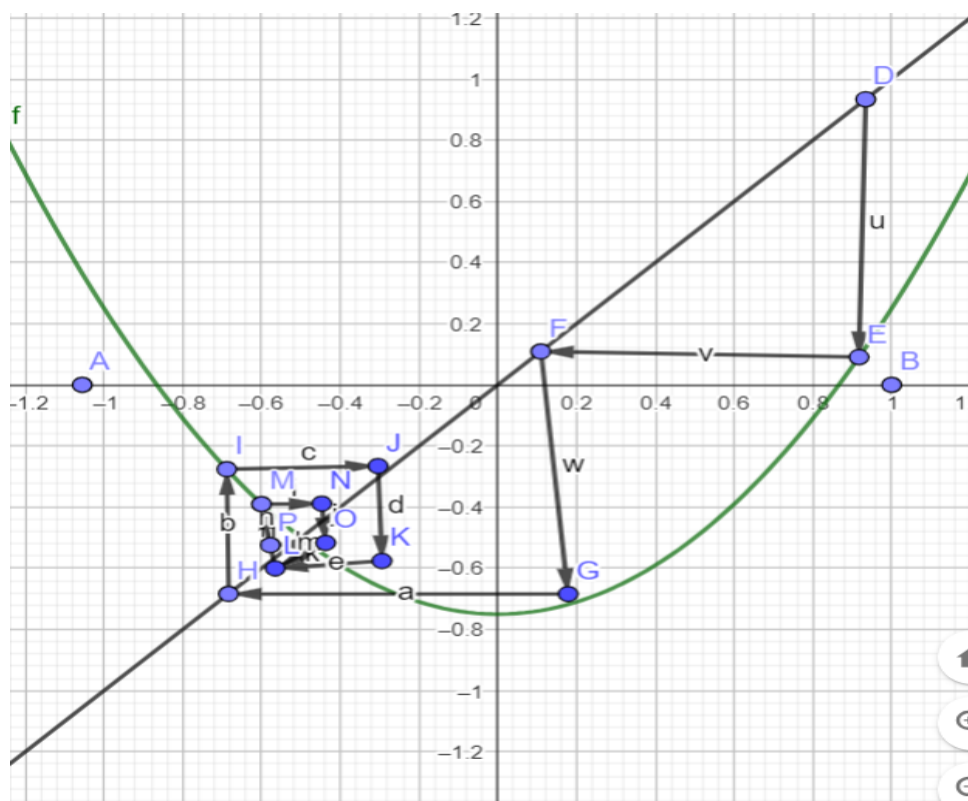
c. Agar $c < -3/4$ bo'lsa, p_- itaruvchi bo'ladi.

Biz bu yerda keying boblarda zarur bo'ladigan kuzatuv qilamiz. $c \leq 1/4$ uchun, $-p_+ \leq x \leq p_+$ intervalda barcha qiziqarli dinamikalar sodir bo'ladi. $Q_c(-p_+) = p_+$ ekanligini eslatib o'tamiz, shunday qilib $-p_+$ deyarli qo'zg'almas nuqta. Haqiqatdan ham, grafik analiz shuni ko'rsatadiki, agar $x > p_+$ yoki $x < -p_+$ bo'lsa, u holda x ning orbitasi cheksizlikka qarab ketadi.

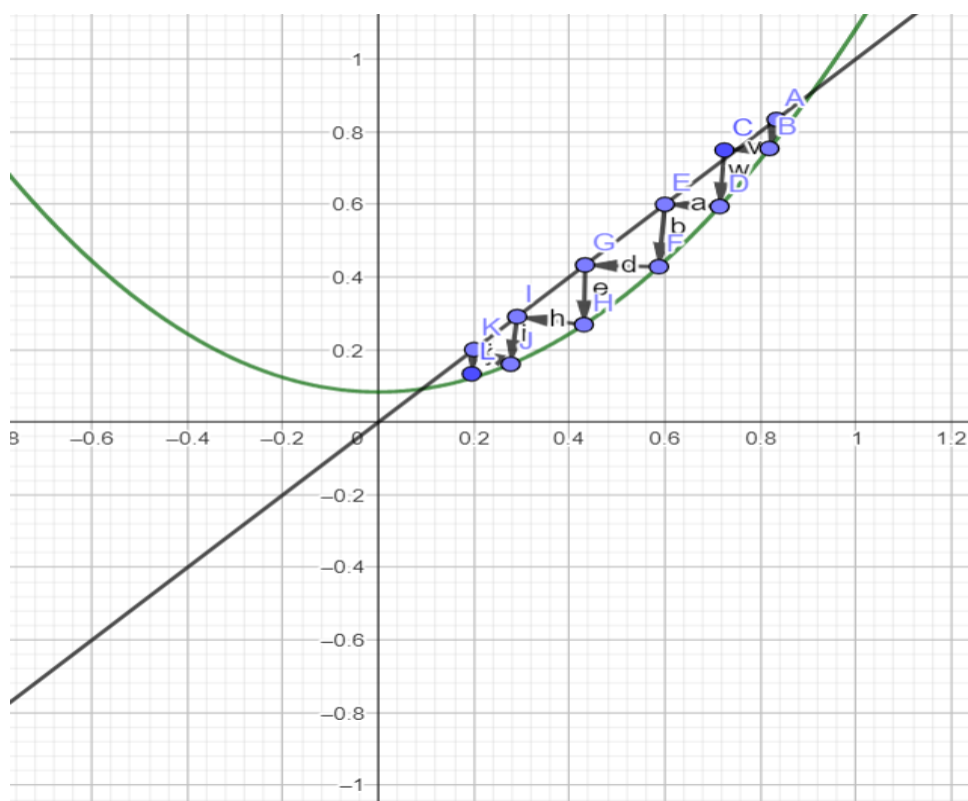


Yana shu narsani isbotlashimiz mumkinki, $-3/4 < c < 1/4$ uchun $(-p_+, p_+)$ intervalning barcha orbitalari tortuvchi qo'zg'almas nuqta p_- ga yaqinlashadi. Bu holatni $0 \leq c < 1/4$ oraliq uchun to'g'ridan-to'g'ri isbotlash mumkin, ammo boshqa

holatlarda isbotlash murakkabroq. Shuning uchun biz buni grafik analiz orqali ko'rsatishimiz mumkin.



(a) $-3/4 < c < 0$ bo'lgan holat uchun



(b) $0 \leq c < 1/4$ bo'lgan holat uchun

Grafik analiz shuni ko'rsatadiki, Q_c ning barcha nuqtalari $-p_+ < x < p_+$ intervalda agar $-3/4 \leq c < 1/4$ bo'lganda p_- ga yaqinlashadi.

Hozir biz diqqatimizni $c = -3/4$ dan pasayib ketganda nima sodir bo'lishiga qaratamiz. Yuqoridagilardan bilamizki, p_- o'ziga tortishdan to'xtaydi va bu holat sodir bo'lganda itaruvchi bo'la boshlaydi. $c < -3/4$ bo'lganda boshqa sikllar yo'qligini ham bilamiz. Shunday qilib $c < -3/4$ bo'lganda bu to'g'rimi deb savol beramiz? Javobimiz esa yo'q: 2-davrning sikli $c < -3/4$ bo'lganda paydo bo'ladi. Buni ko'rish uchun biz $Q_c^2(x) = x$ tenglamani yechishimiz kerak. Natijaviy tenglama quyidagicha 4-darajali va yechish qiyin bo'lgan ko'rinishga keladi:

$$x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0.$$

Shunga qaramasdan biz bu tenglamaning ikkita yechimini bilamiz, ular esa qo'zg'almas nuqta deb ataluvchi p_+ va p_- yechimlardir. Shuning uchun, $x - p_-$ va $x - p_+$ bu 4-tartibli tenglamaning ko'paytuvchilari bo'ladi ($c < 1/4$ uchun). Shuning uchun, shunday qilib $(x - p_+)(x - p_-) = x^2 + c - x$. Biz bilamizki, p_+ va p_- ikkalasi ham qo'zg'almas nuqtalardir va $x^2 + c - x$ tenglamaning yechimlari hamdir.

Shunday qilib biz bizning to'rtinchi darajali ko'phadimizni bu miqdorga bo'lishimiz mumkin, u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\frac{x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c}{x^2 + c - x} = x^2 + x + c + 1.$$

Keyin, $x^2 + x + c + 1 = 0$ tenglamaning yechimi Q_c^2 ning qo'zg'almas nuqtalarini beradi, shu sababli bu yechimlar Q_c ning 2-davrining davriy nuqtalari hisoblanadi. Bu ildizlar quyidagilardir:

$$q_{\pm} = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{-4c - 3}).$$

Shuni eslatib o'tamizki, $q_{\pm}$ ham c ga bog'liq. Bundan tashqari, $q_{\pm}$ haqiqiy sonlar bo'ladi, faqatgina $-4c - 3 \geq 0$ bo'lganda, ya'ni $c \leq -3/4$. Shu tarzda bizda yangi turdagi bifurkatsiya paydo bo'ladi, va u *global bifurkatsiya* deb nomlanadi. $c = -3/4$ dan kamaysa, ikki hodisa sodir bo'ladi: p_- qo'zg'almas nuqta tortuvchilikdan itaruvchilikka o'zgaradi va $q_{\pm}$ uchun 2-sikl paydo bo'ladi. $c = -3/4$ bo'lganda $q_+ = q_- = -1/2 = p_-$ ekanligini eslatib o'tamiz, shuning uchun $c = -3/4$ bo'lganda p_- da 2 ta yangi davriy nuqtalar paydo bo'ladi.

Mulohaza. Ikkinchi bifurkatsiya. $Q_c(x) = x^2 + c$ oilasi uchun:

1. Agar $-3/4 < c < 1/4$ bo'lsa, Q_c p_- tortuvchi qo'zg'almas nuqtaga ega.
2. Agar $c = -3/4$ bo'lsa, Q_c $p_- = q_+$ neytral qo'zg'almas nuqtaga ega.
3. Agar $-5/4 < c < -3/4$ bo'lsa, Q_c p_+ itaruvchi qo'zg'almas nuqtaga ega

bo'ladi va q_+ da 2-davrga tortiladi.

LOKAL BIFURKATSIYA

Keyingi ikki bo'limda biz kvadrat oilasini tasvirlashni vaqtincha to'xtatib turamiz. Biz F_λ funksiyalarning 1-parametrliligidan ko'rib chiqmoqchimiz. Bu yerda λ

parametr, shunday qilib har bir λ uchun F_λ funksiya x ning funksiyasi. Biz F_λ har bir oila uchun dx va λ ga tekis bog'liq deb faraz qilamiz, agarda boshqacha qayd etilmagan bo'lsa. Misol uchun, $F_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, $S_\lambda(x) = \lambda \sin(x)$ va $E_\lambda(x) = \exp(x) + \lambda$ bular barchasi funksiyalarning 1-parametrliligidan hisoblanadi. 1-parametrliligidan funksiyalarning oilasida bifurkatsiyalar qachonki, λ bir qancha alohida parameter qiymatga o'tsa, qo'zg'almas va davriy nuqta tuzilishi o'zgarsa sodir bo'ladi. Bifurkatsiyalar orasida eng muhimi lokal yoki tangens bifurkatsiyadir.

XULOSA.

Ta'rif. F_λ 1-parametr oilasi λ_0 qiymatda lokal bifurkatsiyaga duch keladi, agarda ochiq interval I va $\varepsilon > 0$ uchun:

1. $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0$, F_λ I intervalda qo'zg'almas nuqtaga ega emas.
2. $\lambda = \lambda_0$, F_λ I intervalda bitta qo'zg'almas nuqtaga ega va bu qo'zg'almas nuqta neytral.
3. $\lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \varepsilon$, F_λ I intervalda ikkita qo'zg'almas nuqtaga ega, bitta tortuvchi va bitta itaruvchi.

Bu to'liqtirilgan ta'rif. Intuitiv ravishda bu ta'rifning ma'nosi quyidagicha. Lokal yoki tangens bifurkatsiya sodir bo'ladi, agarda λ qiymat λ_0 dan qat'iy kichik bo'lganda I intervalda qo'zg'almas nuqta mavjud bo'lmasa, aniqki $\lambda = \lambda_0$ bo'lganda I intervalda bitta qo'zg'almas nuqta bo'ladi, va aniqki λ qiymat λ_0 dan qat'iy kata bo'lsa I intervalda ikkita qo'zg'almas nuqtaga ega bo'ladi.

Izohlar:

1. λ dagi tengsizliklar haqida aniq narsa yo'q, lokal bifurkatsiya yana sodir bo'ladi, agar bifurkatsiyaning yo'nalishi teskari bo'lsa, bunda $\lambda_0 + \varepsilon > \lambda > \lambda_0$ va hokazo.

2. Davriy nuqtalar ham lokal bifurkatsiyaga uchrashi mumkin. Bular quyidagicha tasvirlanadi: F_{λ} bilan F_{λ}^n o'rnini yuqoridagi ta'rifda n davr sikli uchun oddiygina almashtiramiz.

3. Lokal bifurkatsiya odatda F_{λ_0} ning grafigi (x_0, x_0) diagonal bilan kvadrat tangensga ega bo'lsa (shunday $F'_{\lambda_0}(x_0) = 1$ lekin $F''_{\lambda_0}(x_0) \neq 0$). Bu holat F_{λ_0} ning grafigi ikkalasi ham botiq yoki pastga qaraganini ifodalaydi, shunday qilib x_0 atrofida F_{λ_0} faqat bitta x_0 qo'zg'almas nuqtaga ega.

4. F_{λ_0} ning x_0 da diagonalga urinishi "tangens" bifurkatsiya terminologiyasining natijasidir. "lokal" termini yuqori o'lchamlarda va differensial tenglamalar sohasida ushbu bifurkatsiyaning tavsifidan kelib chiqadi. Bizning bu oddiy vaziyatimizda bu atama juda shaffof emas, lekin shunga qaramasdan standart.

5. Bifurkatsiya nazariyasi "local" nazariyasida biz faqat davriy nuqta tuzilishini λ_0 parametr qiymat atrofidagi o'zgarishini o'rganamiz. Buning sababi ta'rifdagi ε . Odatda ε kichik bo'ladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Devaney, R.L. An Introduction to Chaotic Dynamical Systems // New York: Westview Press, 1989, p-181.
2. Ganikhodzhaev R.N., Narziyev N.B., Seytov Sh.J. Multi-dimensional case of the problem of Von Neumann - Ulam. Uzbek Mathematical Journal 2015 Vol. 3, Issue 1, 11-23. (01.00.00 №6)
3. Seytov Sh. J., Ganikhodzhaev R. N. The method of graphical analysis for some two dimensional dynamical systems // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, Vol.2, No 4. Page. 22-26. (01.00.00 №4)
4. Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J., Obidjonov I.N., Sadullayev L. The sets of Julia and Mandelbrot for multi-dimensional case of logistic mapping Central asian problems of modern science and education Vol. 2020, Issue 4, 81-94. (ОАКНИНГ 30.06.2020 йилдаги №01-10/1103—сон хатига илова, №8).
5. Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J. Coexistence chaotic behavior on the evolution of populations of the biological systems modeling by three dimensional quadratic mappings // Global and Stochastic Analysis. 2021. Vol.8, No 3. Page. 41-45. (№3 Scopus. IF= 0.248).
6. Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J. An analytical description of Mandelbrot and Julia sets for some multi-dimensional cubic mappings // AIP Conference Proceedings, 2021, Vol.2365, Page.050006. (№3 Scopus. IF=0.189).

7. Ganikhodzhaev R.N., Seytov Sh.J. Mathematical modelling of the evolutions of the populations in the connected two islands // Problems of computational and applied mathematics 2021. Vol.1 (31), Page.24-35. (01.00.00 №9)
8. Seytov Sh.J. Dynamics of the populations depend on previous two steps// Ilm sarchashmasi. 2022. Vol.1, No 1. Page. 17-22. (01.00.00 №12)
9. Seytov, Sh.J., Narziyev, N.B., Eshniyozov, A.I., Nishonov, S.N. The algorithms for developing computer programs for the sets of Julia and Mandelbrot
10. Seytov, S.J., Eshniyozov, A.I., Narziyev, N.B. Bifurcation Diagram for Two Dimensional Logistic Mapping AIP Conference Proceedings This link is disabled., 2023, 2781, 020076 111 https://t.me/ares_uz March, 2024 Multidisc