БЕРНУЛЛИ ТЕНГЛАМАСИГА КЕЛТИРИЛИБ ЕЧИЛАДИГАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ОДДИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМА УЧУН УЧИНЧИ ЧЕГАРАВИЙ МАСАЛА

М.Я.Қосимова
Олий математика кафедраси катта ўқитувчиси
Н.Х.Юсупова
Олий математика кафедраси ўқитувчиси
С.Т.Қосимова(Рустамова)
Олий математика кафедраси ўқитувчиси

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада Бернулли тенгламасига келтириб ечиладиган иккинчи тартибли оддий дифференциал тенглама учун чегаравий масаласи ечимининг ягоналиги ва мавжудлиги ўрганилган. Масала ечимининг ягоналиги экстремум принципи ёрдамида исботланган.

Калит сўз ва иборалар: *оддий дифференциал тенглама, масала ечимининг ягоналиги, масала ечимининг мавжудлиги.*

ТРЕТЬЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПРОСТОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА, РЕШАЕМОГО УРАВНЕНИЕМ БЕРНУЛЛИ

М.Я.Косимова
Старший преподаватель кафедры высшей математики
Н.Х. Юсупова
Преподаватель кафедры высшей математики
С.Т.Қосимова(Рустамова)
Преподаватель кафедры высшей математики

АННОТАЦИЯ

В данной статье исследуется единственность и существование решения задачи пограничный для обыкновенного дифференциалного уравнения второго порядка, приводимого к уравнению Бернулли. Единственность решения задачи доказывается методам принципа экстремума.

Ключевые слова и фразы: *обыкновенное дифференциальное уравнение, единственность решения задачи, существование решения задачи.*

THE THIRD BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE SECOND-ORDER SIMPLE DIFFERENTIAL EQUATION SOLVED BY BERNOULLI'S EQUATION

M.Y.Kosimova
Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics,
N.X.Yusupova
Teacher of the Department of Higher Mathematics,
S.T.Kosimova(Rustamova)
Teacher of the Department of Higher Mathematics,

ABSTRACT

This article examines the uniqueness of the solution of the boundary problem for the second regular ordinary differential equation, which is solved in the Bernoulli equation. The uniqueness of the issue is proved by the principle of extremes.

Keywords and phrases: *ordinary differential equation, unity of a solution, availability of a solution.*

КИРИШ

S_4 **масаланинг қўйилиши.**

$$y''+P_1(x)y'+P_2(x)y'^2+P_3(x)y'^3=P(x), \qquad x\in[x_0;x_1] \tag{1}$$

тенгламани ва

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_1)=y_1 \tag{2}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ функция топилсин. Бу ерда, $P(x),P_1(x),P_2(x),P_3(x)$ - берилган узлуксиз функциялар.

МУҲОКАМА ВА НАТИЖАЛАР

Теорема. $p_1(x)-$ *(1) тенгламанинг (2) чегаравий шартни қаноатлантирмайдиган бирор хусусий ечими,* $P_2(x)+3P_3(x)p_1(x)=0$ *va* $P_1(x)+2P_2(x)p_1(x)+3P_3(x)p_1^2(x)=Q_1(x)$, $y_1-p_1(x_1)\neq 0$, $Q_1(x)\neq 0$, $p_1'(x)+P_1(x)p_1(x)+P_2(x)p_1^2(x)+P_3(x)p_1^3(x)=P(x)$ *шартлар бажарилган бўлсин, у ҳолда* S_3 *масала ягона ечимга эга бўлади.*

Исбот. Масала ечимининг ягоналиги. (1) тенгламада $y'=p(x)$ белгилаш ёрдамида қуйидаги

$$p'(x)+P_1(x)p(x)+P_2(x)p^2(x)+P_3(x)p^3(x)=P(x) \tag{3}$$

тенгламани ҳамда (2) чегаравий шартларнинг иккинчисидан

$$p(x_1)=y_1 \tag{4}$$

шартни ҳосил қиламиз.

Ҳосил бўлган {(3),(4)} янги масалада

$$p(x)=p_1(x)+z(x), \tag{5}$$

алмаштиришни бажариб, баъзи элементар соддалаштиришлардан сўнг

$$z'(x)+\left(P_1(x)+2P_2(x)p_1(x)+3P_3(x)p_1^2(x)\right)\cdot z+\left(P_2(x)+3P_3(x)p_1(x)\right)\cdot z^2+$$
$$+P_3(x)z^3(x)=P(x)-\left[p_1'(x)+P_1(x)p_1(x)+P_2(x)p_1^2(x)+P_3(x)p_1^3(x)\right]$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Бу тенгламага теореманинг шартларини татбиқ этсак

$$z'(x)+Q_1(x)z(x)=-P_3(x)z^3(x) \tag{6}$$

кўринишдаги Бернулли тенгламасини ва (4) чегаравий шартдан (5) алмаштиришга асосан эса

$$z(x_1)=y_1-p_1(x_1) \tag{7}$$

шартни ҳосил қиламиз. (6) тенгламада

$$t(x)=\frac{1}{z^2(x)} \tag{8}$$

алмаштириш бажариб,

$$t'(x)-2Q_1(x)t(x)=2P_3(x) \tag{9}$$

тенгламани ва (7) шартдан эса

$$t(x_1)=\frac{1}{\left[y_1-p_1(x_1)\right]^2} \tag{10}$$

шартни ҳосил қиламиз. Натижада янги {(9),(10)} масалага келамиз.

Фараз қиламиз, {(9),(10)} масала $t_1(x)$ ҳамда $t_2(x)$ ечимларга эга бўлсин. У ҳолда

$$t(x)=t_1(x)-t_2(x) \tag{11}$$

функция

$$t'(x)-2Q_1(x)t(x)=0\ ,\ x\in[x_0;x_1], \tag{9'}$$
$$t(0)=0 \tag{10'}$$

бир жинсли масаланинг ечими бўлади.

Фараз қилайлик, $\{(9'),(10')\}$ масала $t(x)\not\equiv 0$, $x\in[x_0;x_1]$ ечимга эга бўлсин.

$t(x)$ функция $[x_0;x_1]$ сегментда аниқланган ва узлуксиз бўлгани учун Вейерштрасснинг 2-теоремасига асосан мусбат аниқ юқори (манфий аниқ қуйи) чегарасига шу сегментнинг қандайдир $x'\in[x_0;x_1]$ нуқтасида эришади.

$t(x)$ функция мусбат аниқ юқори (манфий аниқ қуйи) чегарасига $(x_0,x_1]$ ярим интервалда эришсин деб фараз қиламиз. Унда $t(x_0')>0$ (<0) мусбат максимум (манфий минимум) қиймат деб фараз қилсак, $t'(x')=0$ бўлади ҳамда

$$t'(x_0')-2Q_1(x_0')t(x_0')\underset{<}{>}0$$

тенгсизлик бажарилади. Бу эса $(9')$ га зид. Демак, $t(x)$ функция $\forall x'\in(x_0,x_1]$ да ($(9')$ га асосан)

$$t(x)\equiv 0,\qquad \forall x'\in(x_0,x_1] \tag{12}$$

бўлади. Бундан (11) га асосан $t_1(x)=t_2(x)$. Бундан эса $\{(9),(10)\}$ масаланинг ечими биттадан ортиқ эмаслиги келиб чиқади.

Демак, $\{(9),(10)\}$ масала агар у ечимга эга бўлса $[x_0;x_1]$ кесмада у ягона. $\{(9),(10)\}$ масаланинг ечими ягона эканлигидан $\{(1), (2)\}$ масаланинг ечими ҳам ягона эканлиги келиб чиқади. Чунки, $\{(9),(10)\}$ масала $\{(1),(2)\}$ масалага эквивалент масаладир.

Масала ечимининг мавжудлиги. (9) тенглама умумий ечимини топиш учун Бернулли усулидан фойдаланиб, уни

$$t(x)=u(x)\cdot v(x) \tag{13}$$

кўринишда қидирамиз. (13) ни (9) га қўйиб

$$u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\left[v'(x)-2Q_1(x)\cdot v(x)\right]=2P_3(x)$$

тенгликни ҳосил қилиб, бундан

$$v(x)=v(x_1)e^{-2\int_x^{x_1}Q_1(s)ds},$$

$$u(x)=u(x_1)-\frac{2}{v(x_1)}\cdot\int_x^{x_1}P_3(s)e^{2\int_s^{x_1}Q_1(\tau)d\tau}ds$$

функцияларни топиб, (13) га асосан (9) тенглама умумий ечимини

$$t(x)=\left[u(x_1)v(x_1)-2\cdot\int_x^{x_1}P_3(s)e^{2\int_s^{x_1}Q_1(\tau)d\tau}ds\right]\cdot e^{-2\int_x^{x_1}Q_1(s)ds},$$

$$t(x)=\left[t(x_1)-2\cdot\int_x^{x_1}P_3(s)e^{2\int_s^{x_1}Q_1(\tau)d\tau}ds\right]\cdot e^{-2\int_x^{x_1}Q_1(s)ds}$$

кўринишида топамиз.

Бу ечимни (10) шартга бўйсундириб

$$z(x)=\pm\left\{\frac{1}{\left[y_1-p_1(x_1)\right]^2}-2\cdot\int_x^{x_1}P_3(s)e^{2\int_s^{x_1}Q_1(\tau)d\tau}ds\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\int_x^{x_1}Q_1(s)ds}$$

функцияни топамиз. Бундан юқоридаги (5) алмаштиришга асосан орқага қайтиб (3) тенгламанинг (4) шартни қаноатлантирувчи ечимини

$$p(x)=p_1(x)+\left\{\frac{1}{\left[y_1-p_1(x_1)\right]^2}-2\cdot\int_x^{x_1}P_3(s)e^{2\int_s^{x_1}Q_1(\tau)d\tau}ds\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\int_x^{x_1}Q_1(s)ds}$$

кўринишда топамиз ва ниҳоят $y'=p(x)$ белгилаш ёрдамида (1) тенгламанинг (2) шартларни қаноатлантирувчи ечимини

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}p_1(s)ds+\int_{x_0}^{x}\left\{\frac{1}{\left[y_1-p_1(x_1)\right]^2}-2\cdot\int_x^{x_1}P_3(s)e^{2\int_s^{x_1}Q_1(\tau)d\tau}ds\right\}^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\int_x^{x_1}Q_1(s)ds}$$

кўринишда топамиз. Теорема тўлиқ исботланди.

Мисол. $y''+y'-3y'^2+y'^3=-1$ (14)

тенгламани ва

$$y(0)=1,\ \ y'(1)=2 \tag{15}$$

чегаравий шартларни қаноатлантирувчи $y(x)$ функция топилсин.

Ечиш. (14) тенгламада $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$ алмаштириш бажарсак қуйидаги

$$p'+p-3p^2+p^3=-1 \tag{16}$$

тенгламани ҳамда (15) чегаравий шартларнинг иккинчисидан

$$p(1)=2 \tag{17}$$

шартни ҳосил қиламиз.

Бу тенгламанинг хусусий ечимини $p_1=ax+b$ кўринишда излаймиз.

$$a+(ax+b)-3(ax+b)^2+(ax+b)^3=-1$$

бундан $a=0$ ва $b=1$ га тенг эканлигини топамиз. Бу тенгламанинг хусусий ечимини $p_1=1$ кўринишда ёза оламиз. Энди тенгламада

$$p(x)=1+z(x) \tag{18}$$

алмаштиришни бажарсак, тенглама

$$z'+(1+z)-3(1+z)^2+(1+z)^3=-1$$

$$z'+1+z-3-6z-3z^2+1+3z+3z^2+z^3=-1$$

кўринишидаги Бернулли тенгламасига келамиз.

$$z'-2z=-z^3 \tag{19}$$

кўринишдаги Бернулли тенгламасини ва (17) чегаравий шартдан (18) алмаштиришга асосан эса

$$z(1)=1 \tag{20}$$

шартни ҳосил қиламиз. (19) тенгламада

$$t(x)=\frac{1}{z^2(x)} \tag{21}$$

алмаштириш бажариб,

$$t'(x)+4t(x)=2 \tag{22}$$

тенгламани ва (20) шартдан эса

$$t(1)=1 \tag{23}$$

шартни ҳосил қиламиз. Натижада янги $\{(22),(23)\}$ масалага келамиз.

(22) тенглама умумий ечимини топиш учун Бернулли усулидан фойдаланиб, уни

$$t(x)=u(x)\cdot v(x) \tag{13}$$

кўринишда қидирамиз. (13) ни (22) га қўйиб

$$v(x)\cdot u'(x)+u(x)\cdot\left(v'(x)+4v(x)\right)=2$$

тенгликни ҳосил қилиб, бундан

$$v(x)=v(1)e^{-4x+4},\ u(x)=u(1)-\frac{1}{2v(1)}+\frac{1}{2v(1)}e^{4x-4}$$

функцияларни топиб (13) га асосан (22) тенгламанинг умумий ечимини

$$t=\frac{1}{2}e^{4-4x}+\frac{1}{2}$$

кўринишда топилади, бу ечимни (23) шартга бўйсундириб,

$$z(x)=\pm\frac{\sqrt{2}e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+e^{4}}}$$

функцияни топамиз. Бундан юқоридаги (16) тенгламанинг умумий ечими

$$p(x)=1\pm\frac{\sqrt{2}e^{2x}}{\sqrt{e^{4x}+e^{4}}}$$

кўринишида бўлади. (14) тенгламанинг (15) чегаравий шартларни қаноатлантирувчи умумий ечими

$$y=1+x+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+e^{4}})-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln\left(1+\sqrt{1+e^{4}}\right)$$

кўринишда бўлади.

REFERENCES

1. Мирзамахмудов, Т., & Умарова, Г. (2014). Некоторые вопросы основ местного самоуправления. In *Теория и практика развития экономики на международном, национальном, региональном уровнях* (pp. 222-224).
2. Shadimetov, K., & Daliyev, B. (2021, July). Composite optimal formulas for approximate integration of weight integrals. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2365, No. 1, p. 020025). AIP Publishing LLC.
3. Абдуразаков, А., Махмудова, Н., & Мирзамахмудова, Н. (2020). Численное решение методом прямых интеграла дифференцирования уравнений, связанных с задачами фильтрации газа. *Universum: технические науки*, (7-1 (76)), 32-35.
4. Шадиметов, Х. М., & Далиев, Б. С. (2020). Коэффициенты оптимальных квадратурных формул для приближенного решения общего интегрального уравнения Абеля. *Проблемы вычислительной и прикладной математики*, (2 (26)), 24-31.
5. Abdurazakov, A., Makhmudova, N., & Mirzamakhmudova, N. (2021). On one method for solving degenerating parabolic systems by the direct line method with an appendix in the theory of filtration.
6. Hayotov, A. R., Bozarov, B. I., & Abduganiev, A. (2018). Optimal formula for numerical integration on two dimensional sphere. *Uzbek Mathematical Journal*, *3*, 80-89.

7. Bozarov, B. I. (2019). An optimal quadrature formula with sinx weight function in the Sobolev space. *Uzbekistan academy of sciences vi romanovskiy institute of mathematics*, 47.
8. Hayotov, A., & Bozarov, B. (2021, July). Optimal quadrature formulas with the trigonometric weight in the Sobolev space. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2365, No. 1, p. 020022). AIP Publishing LLC.
9. Alimjonova, G. (2021). Modern competencies in the techno-culture of future technical specialists. *Current research journal of pedagogics (2767-3278)*, *2*(06), 78-84.
10. Каримов, Ш. Т., & Хожиакбарова, Г. (2017). Аналог задачи гурса для одного неклассического уравнения третьего порядка с сингулярным коэффициентом. *Toshkent shahridagi turin politexnika universiteti*, 121.
11. Tillabayev, B., & Bahodirov, N. (2021). Solving the boundary problem by the method of green's function for the simple differential equation of the second order linear. *Academicia: An International Multidisciplinary Research Journal*, *11*(6), 301-304.
12. Kosimov, н., & tillabaev, B. (2018). Mixed fractional order integral and derivatives for functions of many variables. *Scientific journal of the Fergana State University*, *1*(2), 5-11.
13. Ахмедова, Г. А., & Файзуллаев, Ж. И. (2014). Управление инновационной активностью промышленных предприятий на основе эффективных методов ее оценки и стимулирования. *Актуальные проблемы гуманитарных и естественных наук*, (4-1).
14. Fayzullaev, J. (2020). A systematic approach to the development of mathematical competence among students of technical universities. *European Journal of Research and Reflection in Educational Sciences Vol*, *8*(3).
15. Mirzakarimov, E. M., & Faizullaev, J. I. (2019). Method of teaching the integration of information and educational technologies in a heterogeneous parabolic equation. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *1*(5), 13-17.
16. Mirzakarimov, E. M., & Fayzullaev, J. S. (2020). Improving the quality and efficiency of teaching by developing students* mathematical competence using the animation method of adding vectors to the plane using the maple system. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *2*(9), 336-342.
17. Nazarova, G. (2021). Methods of directing economics to scientific research activities. *Current research journal of pedagogics (2767-3278)*, *2*(06), 90-95.

18. Atroshchenko, P. V., & Yusupova, N. I. (2007). On an approach to risk forecasting in leasing activities. *Problemy Upravleniya*, *6*, 35-40.
19. Azizov, M. S., & Rustamova, S. T. (2017). Yuqori tartibli differensial tenglamalarni bernulli tenglamasiga keltirib yechish. *Toshkent shahridagi turin politexnika universiteti*, 61.
20. Abdulkhaev, Z. E. (2021). Protection of Fergana City from Groundwater. *Euro Afro Studies International Journal*, (6), 70-81.
21. Qo'ziyev, S. (2021, April). Methods, tools and forms of distance learning. In *Конференции*.
22. Кузиев, Ш. А. (2017). Актуальное членение как особая характеристика синтаксического уровня. *Молодой ученый*, (1), 528-530.
23. Каримов, Ш. Т., & Юлбарсов, Х. А. (2021). Задача гурса для одного псевдопараболического уравнения третьего порядка с оператором бесселя. *ББК 22.161 С56*, 176.
24. Kosimov, K., & Mamayusupov, J. (2019). Transitions melline integral of fractional integrodifferential operators. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *1*(1), 12-15.
25. Sattorov, A. M., & Xujaxonov, Z. Z. (2019). Approach calculation of certain specific integrals by interpolating polynomials. *Scientific Bulletin of Namangan State University*, *1*(3), 10-12.
26. Шаев, А. К., & Нишонов, Ф. М. (2018). Сингулярные интегральные уравнения со сдвигом Карлемана с рациональными коэффициентами. *Молодой ученый*, (39), 7-12.
27. Azizov, M., & Rustamova, S. (2019). The Task of Koshi for ordinary differential equation of first order which refer to equation of Bernoulli. *Scientific journal of the Fergana State University*, *2*(1), 13-16.
28. Hayotov, A., & Rasulov, R. (2021, July). Improvement of the accuracy for the Euler-Maclaurin quadrature formulas. In *AIP Conference Proceedings* (Vol. 2365, No. 1, p. 020035). AIP Publishing LLC.
29. Хаетов, А. Р., & Расулов, Р. Г. (2020). Расширение квадратурной формулы Эйлера-Маклорена в пространстве W. *Matematika Instituti Byulleteni Bulletin of the Institute of Mathematics Бюллетень Института*, (3), 167-176.
30. Abdulkhaev, Z. E., Abdurazaqov, A. M., & Sattorov, A. M. Calculation of the Transition Processes in the Pressurized Water Pipes at the Start of the Pump Unit. *JournalNX*, *7*(05), 285-291.

31. Abdulkhaev, Z. E., Madraximov, M. M., Rahmankulov, S. A., & Sattorov, A. M. (2021, June). Increasing the efficiency of solar collectors installed in the building. In *" online-conferences" platform* (pp. 174-177).

32. Qosimova, M. Y., & Yusupova, N. X. (2020). On a property of fractional integro-differentiation operators in the kernel of which the meyer function. *Scientific-technical journal*, *24*(4), 48-50.