

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

МУМИНОВ Фарход Маликович

канд. мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

КАРИМОВ Сардор Яшинович

Ассистент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: mr_man89@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В этой статье приводится постановка корректной краевой задачи для уравнения смешанного эллипτικο-параболического типа. При определённых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается корректности этих задач в пространстве С. Л. Соболева.

Ключевые слова: уравнения, смешанная задача, корректность

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv (-1)^{\lfloor \frac{p}{2} \rfloor + 1} K(t) D_t^p u + (-1)^{m+1} \sum_{|\alpha|, |\beta|=m} D_x^\alpha (a_{\alpha\beta} D_x^\beta u) + Bu = f \quad (1)$$

$$Bu = \sum_{i=1}^{p-1} K_i(x, t) D_t^i u + \sum_{|\alpha| \leq 2m-1} b_\alpha(x, t) D_x^\alpha u,$$

$$D_x^\alpha u = \frac{\delta^{|\alpha|} u}{\delta x_1^{\alpha_1} \dots \delta x_n^{\alpha_n}}; \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \alpha_i \in \mathbb{N}$$

Где $p \geq 1, m \geq 1$ – целые числа, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$, Ω -область, ограниченная достаточно гладкой замкнутой поверхностью γ в R^n , $x, t \in G = \Omega \times [0, T], \Gamma = \gamma \times [0, T]$.

Предлагается, что коэффициенты уравнения (1) гладкие и удовлетворяют следующим условиям: $K(t) > 0, t > 0; \quad K(0) = 0; \quad a_{\alpha\beta}(x, t) = a_{\beta\alpha}(x, t),$

$$\sum_{|\alpha|, |\beta|=m} a_{\alpha\beta} \xi^{\alpha+\beta} \geq \mathcal{V}(\xi)^{2m}, \quad (x, t) \in G, \quad \xi \in R^n, \mathcal{V} > 0.$$

Задача. В области G ищется решение уравнения (1) такое, что

$$\frac{\delta^k u}{\delta n^k} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad K = \overline{0, m-1} \quad (2)$$

$$D_t^i u \Big|_{t=0} = 0, \quad 0 \leq i \leq \left[\frac{p-1}{2} \right] - 1; \quad D_t^j u \Big|_{t=\Gamma} = 0, \quad 0 \leq j \leq \left[\frac{p}{2} \right] - 1 \quad (3)$$

Где $n = (n_1, \dots, n_n, n_i)$ –внутренняя нормаль K, Γ .

В настоящей работе при определенных условиях на коэффициенты уравнения доказана существования единственного регулярного решения задачи (1)-(3) в весовом пространстве Соболева. Через C_L обозначим класс гладких функций в \bar{G} , удовлетворяющих краевым условиям (2)-(3).

1. При $\rho = 2S$ для простоты положим $K_{2S-1} = (-1)^{S+1}a(x, t)$, $K_{2S-2} = (-1)^{S+1}b(x, t)$ и будем считать, что функция $\beta(x) = \alpha(x, 0) - K_t(0) \geq 0$. Пусть H_L весовое пространство Соболева, которое получено пополнением класса C_L по норме

$$\|u\|_L^2 = \int_G \left[K^2 (D_t^{2S} u)^2 + K \sum_{1 \leq |\alpha| \leq m} (D_t^S D_x^\alpha u)^2 \right] dG + \|u\|_{2m}^2, \quad 2S - 1$$

Где $\|\cdot\|$ - норма пространства $W_2^{m,S}(G)$ [1].

Рассмотрим вспомогательные операторы:

$$L_0 u = (-1)^{S+1} [K(t) D_t^{2S} + a_1 D_t^{2S-1} u + b_1 D_t^{2S-2} u] + (-1)^{m+1} \Delta^m u + c_1 u$$

$$P u = (-1)^{S+1} D_t^{2S-1} u + (-1)^{m+1} \Delta^m u,$$

Где a_1, b_1, c_1 – некоторые константы.

Лемма1. При достаточно больших $a_1 > 0, -b_1 > 0, -c_1 > 0$ для всех $u \in C_L$ Имеет место неравенство

$$(L_0 u, P u)_{0,0} \geq m_3 \left[\int_G K \sum_{|\alpha|=m} (D_t^S D_x^\alpha u)^2 dG + \|u\|_{2m, 2S-1}^2 \right], \quad m_3 > 0$$

Доказательство. Для любой функции $u(x, t)$ из C_L справедливо неравенство

$$\begin{aligned} (L_0 u, P u)_{0,0} &= \frac{1}{2} \int_{t=0} \left[(a_1 - a + SK_t) (D_t^{S-1} u)^2 + (a_1 + 1 - SK_t D_t^{S-1} V^2) \right] dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{t=\Gamma} K (D_t^{S-1} u)^2 dx + \int_G \left\{ a_1 - \frac{1}{2} K_t (D_t^{S-1} u) + (\Delta^m u)^2 + \right\} dx + \\ &+ K (D_t^S u) + \left[-b_1 - \frac{S^2}{2} K_{tt} \right] (D_t^{S-1} u)^2 - c_1 u^2 + K (D_t^S V)^2 + \\ &+ \left[-b_t - \frac{S^2}{2} K_{tt} \right] (D_t^{S-1} u)^2 + [(-c_1 + 1) V^2] dG \end{aligned}$$

Где $V = (-\Delta)^m/2u$, а интегральные члены, обозначенные многоточием, играют подчиненную роль. Из последнего равенства на основании неравенств Коши, Гординга и теоремы вложения следует утверждение леммы1.

Теорема1. Пусть числа $a_1 > 0, -b_1 > 0, -c_1 > 0$ является достаточно большими. Тогда для любой $f \in L_2(G)$ уравнение $L_0u = f$ имеет единственное решение в пространстве H_L и справедлива оценка

$$\|u\|_L \leq m\|f\|_{0,0}, \quad m > 0.$$

Доказательство. Пусть $\{\psi_k\}$ – фундаментальная система в $W_2^{2m,2S}(G) \cap W_2^{m,S}(G)$ ортонормированная в $L_2(G)$. В качестве базиса $\{\varphi_k\}$ возьмем решения краевой задачи:

$$P\varphi_e = \psi_e, \quad e = 1, 2, \dots \quad (4)$$

$$\frac{\delta^i \varphi_e}{\delta h^i} \Big|_{\Gamma} = 0, \quad i = \overline{0, m-1}; \quad D_t^j \varphi_e \Big|_{t=0} = 0, \quad j = \overline{0, S-2}; \quad D_t^{S-1} \varphi_e \Big|_{t=T} = 0 \quad (5)$$

В силу [2] задачи (4)-(5) имеет единственное решение φ_e из $W_2^{2m,2S}(G)$. Приближенные решения $u^V(x, t)$ ищем в виде

$$u^V = \sum_{k=1}^N C_k^N \varphi_k(x, t)$$

из системы алгебраических уравнений

$$(L_e u^N, \psi_k)_{0,0} = (f, \psi_k)_{0,0}, \quad k = \overline{1, N} \quad (6)$$

Умножим каждое из (6) на C_k^N и сложим по k ой 1 до N . Получим равенство

$$(L_e u^N, P u^V)_{0,0} = (f, P u^V)_{0,0}$$

Из которого, в силу леммы1 следует оценка

$$\int_G K \sum_{|\alpha|=m} (D_t^S D_x^\alpha u^V)^2 dG + \|u^V\|_{2m,2S-1}^2 \leq m, \|f\|_0^2 \quad (7)$$

Отсюда вытекает разрешимость системы (6), ибо для не имеет место теорема единственности. Действительно, если u^V было бы решением однородной системы (6), то из (7) следовало бы, что

$$u^V = 0 \text{ в } W_2^{2m,2S-1}(G) \text{ значит, имеем } 0 = P u^V = \sum_{k=1}^N C_k^N \psi_k.$$

Тогда $C_k^N = 0$ при $k = \overline{1, N}$. Благодаря (7) можно переходит к пределу $N \rightarrow \infty$

в равенстве

$$(f, \psi_e)_{0,0} = (L_0 u^V, \psi_e)_{0,0} = (-1)^S \int_G D_t^{2S-1} u^V D_t(k\psi_e) dG + \dots$$

на основании этого нетрудно видеть, что для предельной функции $u(x, t)$ из $W_2^{2m, 2S-1}(G)$ такой, что $\sqrt{k} \mathcal{D}_t^S \mathcal{D}_x^\alpha u \in L_2(G)$ при $|\alpha| \leq m$, выполнено тождество

$$(f, \eta)_{0,0} = (-1)^S \int_G \mathcal{D}_t^{2S-1} u^V \mathcal{D}_t(k\eta) dG + \dots$$

для любых η из $W_2^{m,S}(G)$. Следовательно уравнение $L_e u = f$ удовлетворяется в смысле распределений в G . Тогда из самого уравнения следует, что $k \mathcal{D}_t^{2S} u$ принадлежит $L_2(G)$. Теорема доказана.

В силу теоремы 1 методом продолжения по параметру доказывается теорема 2.

Теорема 2. Пусть коэффициенты $b_0(x, t) < 0$ и $|b_0|$ достаточно большой. Кроме того выполнены условия

$$2b - (2S - 1)a_t + S^2 K_{tt} \leq -2\delta < 0$$

$$a(x, t) \equiv a(t), \quad 0 \leq t \leq h; a(0) - SK_t(0) \geq \delta > 0$$

Тогда для любой $f \in L_2(G)$ существует единственное решение задачи (1)-(3) из пространства H_L при $p = 2S$.

При $p = 2S + K_{2S} = (-1)^{S+1} a(x, t)$. Обозначим через W_L анизотропное пространство Соболева с весом, полученное замыканием C_L по норме

$$\|u\|_L^2 = \|u\|_{2m, 2S}^2 + \|K \mathcal{D}_t^{2S+1} u\|_{0,0}^2$$

Лемма 2. Пусть коэффициенты $b_0(x, t) < 0$ и $|b_0|$ достаточно большой и $2a(x, 0) - (2S + 1)K_t(0) \geq \delta > 0$

Тогда существует числа $\lambda > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$\int_G e^{-2\lambda t} u L u dG \geq m_0 \|u\|_{m,S}^2, m_0 > 0$$

Лемма 3. Пусть выполнены условия лемма 2 и $a(x, t) \equiv a(t), t \in [0, h_0]$, $0 < h_0 < T$.

Тогда для любой функции $u \in C_L$ справедливо коэрцитивное неравенство

$$\|Lu\|_{0,0} \geq m \|u\|_L, \quad m > 0.$$

Доказательство леммы 2,3 проводится аналогично доказательству соответствующих лемме из [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бесов О.В., Ильин В.П., Николаевский С.М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. М: Наука. 1975. 480 стр.

2. Брюханов Ю.А. Об одном классе эллиптических уравнений, выражавшихся на границе. Дифференциальные уравнения. 1973. Т.4 166-168 стр.
3. Врагов В.К. Краевые задачи неклассических уравнений математической физики. Новосибирск НГУ, 1983, 84 стр.
4. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М. Наука. 1981 448 стр.
5. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7
6. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. О смешанных краевых задачах для уравнения составного типа третьего порядка. Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 4 ISSUE 2 ISSN 2181-1784 SJIF 2024: 7.404 ASI Factor = 1.7
7. Муминов Ф.М., Каримов С.Я. On the formulation of boundary value problems for one third-order equation. International Global Conference 1 (4), 257-263.