QISQARTIRIB AKSLANTIRISH PRINSIPI VA UNING TADBIQLARI TO'G'RISIDA

Boboyarova Nargiza Ashurovna
Urganch davlat universiteti o'qituvchisi
Kutlimuratov Dilmurat Sabirovich
Urganch davlat universiteti o'qituvchisi
Sobirov Usmon Matyaqubov
Urganch davlat universiteti o'qituvchisi

ANNOTATSIYA

Ushbu maqolada qisqartirib akslantirish prinsipi va uning tadbiqlarini dars o'tish jarayonida sodda va lo'nda qilib tushuntirish, keyinchalik murakkab masalalarga bog'liqlik xususiyatlari ko'rib chiqiladi.

Kalit so'zlar: *akslantirish, qisqartirish, M.Freshe, element, metric fazo.*

АННОТАЦИЯ

В данной статье принцип краткого размышления и его применения объясняются просто и лаконично по ходу урока, а затем рассматриваются особенности зависимости от сложных вопросов.

Ключевые слова: *отражение, редукция, М.Фреше, элемент, метрическое пространство.*

Haqiqiy sonlar orasidagi masofa tushunchasini umumlashtirish natijasida zamonaviy matematikaning eng muhim tushunchalaridan biri bo'lgan metrik fazo tushunchasi fransuz matematigi M.Freshe tomonidan 1956-yilda kiritilgan.

quyida biz metrik fazodagi asosiy tushunchalar bilan tanishamiz.

Ta'rif: X to'plamning har bir x va y elementlari juftligiga namunaviy $\rho(x,y)$ haqiqiy soni mos qo'yilgan ,quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, u holda $\rho(x,y)$ funksiyaga metrika deyiladi.

1. $\rho(x,y)\geq 0, \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
3. $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y)$

(X,ρ) juftligiga metrik fazo deyiladi.Haqiqiy sonlar o'qida $x\ va\ y$ sonlar orasidagi masofani $\rho(x,y)=|x-y|$ ko'rinishida aniqlasak u holda $\rho(x,y)$ $metrika$ bo'ladi

Ta'rif: Agar metric fazoning ixtiyoriy fundamental ketma-ketlik shu fazoga

Tegishli limitga ega bo'lsa,u holda u to'la metrik fazo deb ataladi.Haqiqiy sonlar to'plami to'la metrik fazoga misol bo'ladi.

A akslantirish X metrik fazoni o'ziga o'tkazsin $A: X \to X$

Agar $Ax_0 = x_0$ tenglik o'rinli bo'lsa ,u holda x_0 nuqta A akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deb ataladi.

Masalan: R da aniqlangan $f(x) = x$ akslantirishning barcha nuqtalari qo'zg'almas nuqtadan iborat.$f(x) = x^2$ funksiyada esa 0 va 1 nuqtalar

qo'zg'almas nuqtalar bo'ladi. $f(x) = \sqrt{x}$ ning qo'zg'almas nuqtalari 0 va 1

$f(x) = \ln(1+x)$ funksiya $x_0 = 0$ qo'zg'almas nuqtaga ega.

Ta'rif: (X, ρ) metrik fazo va $A: X \to X$ akslantirish bo'lsin.Agar shunday

$\alpha, 0 < \alpha < 1$ soni mavjud bo'lib , $\forall x, y \in X$ nuqtalar uchun $\rho(Ax, Ay) \leq \alpha\rho(x, y)$

Munosabat bajarilsa ,u holda A akslantirishni qisqartirib akslantirish deyiladi.

TEOREMA: (Qisqartirib akslantirish prinspi) to'la metrik fazoning har bir

A qisqartirib akslantirishi yagona qo'zg'almas nuqtaga ega.

Qisqartirib akslantirish prinspi va uning tadbiqlarini talabalarga tushunarli qilib yetkazish ,ularni turli xil masalalarga tadbiq qilish

1-misol C^n da metrika $\rho(z, w) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - w_k)^2}$ kabi kiritiladi.

$Az = \frac{1}{2}z_1, \frac{1}{3}z_2, \dots, \frac{1}{n+1}z_n$ $\quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ akslantirish qisqartirib akslantirish bo'ladimi?

$$\rho(Az, Aw) = \sqrt{\frac{1}{2^2}(z_1 - w_1)^2 + \frac{1}{3^2}(z_2 - w_2)^2 + \cdots \frac{1}{(n+1)^2}(z_n - w_n)^2} \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{1}{2^2}(z_1 - w_1)^2 + \frac{1}{2^2}(z_2 - w_2)^2 + \cdots \frac{1}{2^2}(z_n - w_n)^2} = \frac{1}{2}\rho(z, w)$$

Bundan $\rho(Az, Aw) \leq \frac{1}{2}\rho(z, w) \to \alpha = \frac{1}{2}$ demak A qisqartirib akslantirish ekan.

2-misol R da $f(x) = x - arctgx$ qisqartirib akslantirish bo'ladimi?

$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|$ bo'lsin, u holda $y = x + 1$ deb olsak, u holda

$x \to +\infty$ da $arct(x+1) \to \frac{\pi}{2}, arctx \to \frac{\pi}{2}$ demak $\alpha \geq 1$ bo'ladi.

Demak ,bu qisqartirib akslantirish emas.

3-misol yarim intervalda $f(x) = \frac{1}{2}lnx$ funksiyani qaraylik

$\forall x_1 \in [1; \infty)$,$x_2 \in [1; \infty)$ nuqtalari uchun

$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| \leq \frac{1}{2}|x_1 - x_2|$ tengsizlik o'rinlidir.(Bu yerda$C \in (X_1, X_2)$) Ammo bu funksiya qo'zg'almas nuqtaga ega emas.Chunki

$f(x) = \frac{1}{2}lnx$ akslantirish nurni ga emas ,balki$[0; \infty]$ ga akslantiradi.

4-misol $3, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{3}}$, ... kabi aniqlangan $\{x_n\}$ ketma ketlikni

$x_1 = 3, x_n = 3 + \frac{1}{x_{n-1}}, (n \geq 2)$ ko'rinishida recurrent aniqlash mumkin bo'lganligidan$x_n = 3 + \frac{1}{3+\frac{1}{x_{n-2}}}$, $(n \geq 3)$ tengligi va $x_1 \leq \frac{10}{3}$, $x_2 \leq \frac{10}{3}$

Tengsizliklardan $x_n \leq \frac{10}{3}$ ekani kelib chiqadi.Shu $\left[3; \frac{10}{3}\right]$ segmentni o'z-o'ziga o'tkazadigan $f(t) = 3 + \frac{1}{t}$ akslantirishni qaraymiz.

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| \leq \frac{1}{9}|x - y| = \frac{1}{9}\rho(x, y)$$

Demak, akslantirish qisqartiruvchi ekan,u holda uning yagona qo'zg'almas nuqtasi mavjud bo'lib,$x_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ bo'ladi,bunda $x_n = f(x_{n-1}) = 3 + \frac{1}{x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$ $x_1 = 3, x_0 = 3 + \frac{1}{x_0}$ tenglamani yechib, $x_0 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ ekanini topamiz.Bu berilgan ketma ketlikning limiti bo'ladi.

5-misol $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$ bo'lsin,bu yerda $x_0 = 2$ $\{x_n\}$ ketma ketlik yaqinlashuvchi ekanini isbotlang .

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{1}{x_0}\right) = \frac{1}{2}\left(2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$$

Ketma-ketlikning har bir hadi musbat bo'lgani uchun

$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n}) \geq \frac{1}{2}\sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} \geq 1$ tengsizlik o'rinli.Bu esa ketma ketlikning quyidan chegaralanganligini bildiradi.$f(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{1}{t})$

$$\rho(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = \left|x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right| = \left|(x - y) - \frac{x - y}{xy}\right| \leq$$

$$\{x_1x_2 \geq 1\ ekanidan\} \leq \frac{1}{2}\left|(x - y)\left(1 - \frac{1}{xy}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|(x - y)| = \frac{1}{2}\rho(x, y)$$

ekanini topamiz .Demak qisqartiruvchi ekan.

Masala:Agar$f(x)$ funksiya haqiqiy sonlar o'qida uzluksiz,diferensiallanchi bo'lib,ushbu $0 \leq c \leq f'(x) \leq d < \infty$ sharti o'rinli bo'lsa, u holda

$f(x) = 0$ tenglama yagona yechimga egaligini isbotlang.

Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
SJIF 2023 = 6.131 / ASI Factor = 1.7
(E)ISSN:2181-1784
www.oriens.uz
3(6), June, 2023

Yechimi:$Ax = x - \frac{1}{d}f(x)$ akslantirishning sonlar o'qining o'ziga qisqartirib o'tkazishini ko'rsataylik: $\forall x, y \in R, x < y\ uchun$

$$|Ax - Ay| = \left|x - y - \frac{1}{d}\big(f(x) - f(y)\big)\right| = \left|1 - \frac{1}{d}\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| |x - y| =$$

Demak,$|Ax - Ay| \leq \left|1 - \frac{c}{d}\right| |x - y|$

$0 \leq \left|1 - \frac{c}{d}\right| < 1$ bo'lganligidan $y = Ax$ qisqartirib akslantirish bo'ladi.U holda

$x_0 - \frac{1}{d}f(x_0) = x_0$ tenglikni ,yani $f(x_0) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona x_0 nuqta mavjuddir.

TEOREMA1:Aytaylik, $f(x,y)$ funksiya $G = \{(x,y): a \leq x \leq b, -\infty \leq y \leq \infty\}$

sohada x bo'yicha uzluksiz va y bo'yicha musbat chegaralangan xosilaga ega bo'lsin: $0 < m \leq f_y{}' \leq M$

U holda , $f(x,y) = 0$ tenglama $[a,b]$ kesmada yagona uzluksiz yechimga ega

Yechimi: $C[a,b]$ fazoni o'z –o'ziga o'tkazuvchi $Ay = y - \frac{1}{M}f(x,y)$

akslantirishni qaraymiz.Bu akslantirish qisqartirib akslantirish ekanini ko'rsatamiz.

Agar $y_1\ va\ y_2$ funksiyalar $C[a,b]$ fazoning elementlari bo'lsa, u holda

$$|Ay_1 - Ay_2| = \left|y_1 - \frac{1}{M}f(x_1,y_1) - y_2 - \frac{1}{M}f(x_2,y_2)\right| =$$

Demak,qisqartirib akslantirish prinspidan $\forall y_0 \in C[a,b]$ uchun

$y_1 = Ay_0, y_2 = Ay_1, \ldots$ ketma ketlik yaqinlashuvchi bo'ladi va $\lim_{n\to\infty} y_n = y$

funksiya $f(x,y) = 0$ funksiyaning yagona yechimi bo'ladi.

Masalan: $f(x) = \ln(x+1)$ funksiya $[0;\infty]$ da uzluksiz diferensiallanuvchi va

$0 < \frac{1}{1+x} \leq 1$ demak $\ln(x+1) = 0$ tenglama yagona yechimga ega.

TEOREMA2:Aytaylik, $f(x) \in C[a,b]$ bo'lsin. U holda $y + \frac{1}{2}sinx + f(x) = 0$

tenglama yagona yechimga egaligini isbotlang.

Yechimi: $f(x,y) = y + \frac{1}{2}sinx + f(x)$ funksiya x bo'yicha uzluksiz $f'_y(x,y) = 1$ chegaralangan.Yuqoridagi masalaga ko'ra $f(x,y) = 0$ tenglama $[a,b]$ kesmada yagona uzluksiz yechimga ega.

Xuddi shunday $y + \frac{1}{2}sinx + f(x) = 0$ tenglama ham yagona uzluksiz yechimga ega.

3.1. Ba'zi ketma–ketliklar limitlarini hisoblash.

SHunday ketma–ketliklar borki, ularning limitlarini xisoblashda iteratsiya usuli juda qo'l keladi. Ushbu

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \qquad (1)$$

ketma–ketlikni olaylik. Agar (1) ning hadlari geometrik progressiya tashkil etsa, u xolda quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$a_0, \quad a_1 = a_0 q, \quad a_2 = a_1 q, \; \dots, \quad a_n = a_{n-1} q, \dots \, . \qquad (2)$$

Bu erda q progressiyaning maxraji.

Faraz qilaylik, (1) ning ikkinchi hadidan boshlab har bir hadi o'zidan oldingi hadi bilan biror qonun bo'yicha boғlangan bo'lsin. Bu boғlanishni quyidagicha ifodalaymiz:

$$a_n = f(a_{n-1}), \quad n = 1,2,3,\dots \, . \qquad (3)$$

Agar hadlari (3) tengliklarni qanoatlantiruvchi (1) ketma–ketlikning $n \to \infty$ da chekli limiti mavjud bo'lsa, u holda bunday yaqinlashish usuliga ketma–ket yaqinlashish yoki iteratsiya usuli deyiladi. Bunda a_0–nolinchi yaqinlashish, a_n esa n–yaqinlashish deyiladi. Endi (3) ketma–ketlikning yaqinlashishi uchun etarlilik shartini kiritamiz.

1–teorema. Agar (3) monoton va chegaralangan ketma–ketlik bo'lsa, u yagona chekli limitga ega, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} f(a_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} a_{n-1}\right) = a \, .$$

a soni $a = f(a)$ tenglamadan aniqlanadi.

2–teorema Agar $y = f(x)$ funksiyaning

1) aniqlanish sohasini o'z ichiga olsa yoki unga teng bo'lsa;

2) aniqlanish sohasida olingan ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 qiymatlar uchun $\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \le \alpha \, | x_1 - x_2 |$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $0 < \alpha < 1$ bo'lsa,

u holda (3) ketma–ketlik yagona chekli limitga yaqinlashadi va bu limit $a = f(a)$ tenglamaning ildizi bo'ladi.

Teoremaning isboti murakkab bo'lmaganligi uchun uni keltirib o'tirmaymiz.

Eslatma:

a) 1– va 2– teoremalarning shartlari (3) iteratsiya ketma–ketligi yaqinlashishining etarli shartlaridir, lekin zaruriy shartlari bo'la olmaydi, chunki (3) ketma–ketlik yaqinlashishidan bu shartlarning bajarilishi kelib chiqmaydi.

b) YUqoridagi teoremalar (3) iteratsiya ketma–ketligi chekli limitga yaqinlashishini barcha etarli shartlarini qamrab olmagan.

Endi teoremalarning natijalarini misollarda oydinlashtiramiz.

1–misol. Birinchi hadi a_1, maxraji q bo'lgan geometrik progressiya hadlari yiғindisidan tuzilgan S_n ketma–ketlikni olaylik.

$$S_n = a_1 + q(a_1 + a_2 q + ... + a_1 q^{n-2}) = a_1 + qS_{n-1}.$$

$y = f(x) = a_1 + qx$ funksiyaning aniqlanish sohasi $R = (-\infty, +\infty)$ bo'ladi, qiymatlar to'plash ham. Demak, 2–teoremaning 1–sharti o'rinlidir. $x_1, x_2 \in R$ ixtiyoriy nuqtalar bo'lsin. U holda

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| = \left| qx_1 - qx_2 \right| = | q | \cdot | x_1 - x_2 |$$

Agar $| q | < 1$ bo'lsa, 2–teoremaning 2–sharti ham o'rinli bo'ladi. Demak, ketma–ketliik yaqinlashadi. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S$ larni hisobga olsak, $S = a_1 + qS$ ni hosil qilamiz.

Bundan S ni aniqlasak, $S = \dfrac{a_1}{1-q}$ bo'ladi. Bu esa S_n ketma–ketlikning limitidir. $| q | \geq 1$ bo'lsa, $\{S_n\}$ uzoqlashadi.

2-misol. Interatsiya usulidan foydalanib quyidagi ketma–ketlik limitini hisoblaymiz

$$a_n = b\sqrt{a + b\sqrt{a + ... + b\sqrt{a}}} \qquad (a \geq 0,\ b > 0).$$

Bu erda $a_1 = b\sqrt{a}$; $a_2 = b\sqrt{a + b\sqrt{a}}$ va hokazo.

Yechish. Bu ketma–ketlikning har bir keyingi hadini o'zidan oldingi hadi orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$$a_2 = b\sqrt{a + a_1},\ a_3 = b\sqrt{a + a_2}, ..., a_n = b\sqrt{a + a_{n-1}}. \qquad (4)$$

$\{a_n\}$ monoton (kamaymaydigan) ketma–ketlik ekani ravshan. Demak,

$$a_{n+1} - a_n \geq 0, \quad (n = 1,2,3,...).$$

Bundan

$$0 \leq b\sqrt{a + a_n} - a_n = \frac{b^2(a + a_n) - a_n^2}{b\sqrt{a + a_n} + a_n} \Leftrightarrow -a_n^2 + b^2 a_n + b^2 a \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ a_n^2 - b^2 a_n - b^2 a \leq 0, \quad (n = 1,2,3,...)$$

Oxirgi kvadrat uchhadning ildizlarini aniqlaymiz

$$(a_n)_{1,2} = \frac{b^2 \pm b\sqrt{b^2 + 4a}}{2}.$$

Bunga ko'ra $(a_n)_2 \le a_n \le (a_n)_1$ bo'ladi. $a_n > 0$ $(n = 1,2,3,...)$ bo'lgani uchun ushbu

$$0 < a_n \le \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4a}}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa $\{a_n\}$ ketma–ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi. SHunday qilib, qaralayotgan ketma–ketlik 1–teoremaning hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, u chekli limitga yaqinlashadi. (4) tenglikning har ikkala tomonida $n \to \infty$ bo'lganda limitga o'tamiz va $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n-1} = x$ ni hisobga olamiz. Natijada ushbu $x = b\sqrt{a + x}$, $x = \dfrac{b^2 + b\sqrt{b^2 + 4a}}{2}$ ni topamiz.

Bu yuqoridagi ketma–ketlikning limitidir.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = b\sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + ...}}} = \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 + 4a}}{2}.$$

Bu tenglikning har ikkala tomonini b ga qisqartirsak, quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\sqrt{a + b\sqrt{a + b\sqrt{a + ...}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}. \qquad (5)$$

(5) tenglikda a va b ga tayin qiymatlar bersak, ba'zi muhim limitlarning natijalariga ega bo'lamiz:

1) $b = 1$ bo'lsa, $\sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a + ...}}} = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$;

2) $b = 1$; $a = 2$ bo'lsa, $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}} = 2$;

3) $b = 1$; $a = 6$ bo'lsa, $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + ...}}} = 3$;

4) $b \ne 0$; $a = 0$ bo'lsa, $\sqrt{b + \sqrt{b + \sqrt{b + ...}}} = b$;

5) $b = 2$; $a = 3$ bo'lsa, $\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + ...}}} = 3$

3) va 5) munosabatlardan

$$\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + ...}}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3 + 2\sqrt{3 + ...}}}$$

ekani kelib chiqadi.

REFERENCES

1. Саримсоқов Т.А. Функционал анализ курси. «Ўқитувчи» Т., 1986

2. Саримсоқов Т.А. Ҳақиқий ўзгарувчили функциялар назарияси. Т., 1993
3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М. «Наука». 1972
4. Треногин В.А., Писаревский Б.М., Соболева Т.С. Задачи и упражнения по функциональному анализу. Из-во «Наука». М. 1984
5. Очан Ю.С. Сборник задач по математическому анализу. М. Просвешение.1981.