Oriental Renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences
Scientific Journal Impact Factor
Advanced Sciences Index Factor

VOLUME 2 | ISSUE 5
ISSN 2181-1784
SJIF 2022: 5.947
ASI Factor = 1.7

КВАДРАТИЧНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА ДВУХМЕРНОМ СИМПЛЕКСЕ

Мейлиев Х.Ж. (Кар ГУ)
Рахмонов Б.А.(магистр Кар ГУ),
Суюнов Ж.М. (магистр Кар ГУ)

АННОТАЦИЯ

В данной статье изучаются пространство с мерой. Пусть (E,m) *произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство* $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, *с помошию согласованное семейство конечномерных распределений, где* $E_i=E$ *для всех натуральных* i. *Дано доказательство сингулярности Менделевская мера P и Бернуллиевская мера Q.*

Ключевые слова: *Эргодические, пространство , мера, распределений, последовательности, множества, цилиндр,* σ *-алгебра, преобразования, сдвиг, стохастическая, случайных величины, квадратичный оператор, сюрьективност.*

АННОТАЦИЯ

Ушбу мақолада ўлчовли фазо қаралади. Фараз қилайлик чекли ўлчовли тақсимотлар оиласи ёрдамидаги (E,m) *ихтиёрий ўлчовли фазо бўлсин.* $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, *фазони қараймиз, бу ерда ҳамма натурал* i *сонлар учун* $E_i=E$ *дир. Мендель ўлчови P ва Бернулли ўлчови Q сингулярдлиги исботланган.*

Kalit so'zlar: *Ergodik, fazo, o'lchov, taqsimotlar, ketma-ketliklar, to'plamlar, silindr, -algebra, transformatsiyalar, siljish, stokastik, tasodifiy o'zgaruvchilar, kvadratik operator, sur'ektivlik.*

Пусть (E,m) произвольное пространство с мерой. Рассмотрим пространство $\Omega=\prod_{i=1}^{\infty}E_i$, где $E_i=E$ для всех натуральных i. Одной из важных проблем как в теории меры, так и в теории вероятностей является задача построения меры P на Ω, согласованной с мерой m на E. Для этого достаточно по теореме Колмогорова [1] задать согласованное семейство конечномерных распределений. Так как это конструкция необходима нам для случая конечного множества E. [3].

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$ и $m(\{i\})=P_i$ - вероятностная мера на E, т.е. $P_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{N} P_i = 1$. Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^{\infty} E_i$, где $E_i = E$ для всех натуральных i. Произвольный элемент множества Ω является бесконечной последовательностью $w=(w_1,w_2,...)$ элементов множества E. Пусть ξ_n -функция, ставящая в соответствие точке $w\in\Omega$ значение ω_n ее n-й координаты. Функцию ξ_n назывaют n-й координатой функцией. Пусть $F-\sigma$ алгебра, порожденная совокупностью всех конечномерных цилиндров, т.е. множеств вида

$$\{w:(\xi_n(w),\xi_{n+1}(w),...,\xi_{n+k-1}(w))\in A\} = \{w:(w_n,w_{n+1},...,w_{n+k-1})\in A\}$$

где A-подмножество прямого произведения $E^k = \prod_{i=1}^{k} E_i$.

Цилиндрическое множество называется тонким, если его основание A является одноточечным подмножеством соответствующего конечного прямого произведения. Очевидно, σ -алгебра F порождается также совокупностью всех “тонких” цилиндров, т.е. множеств вида

$\{w:(\xi_n(w)=i_1,\xi_{n+1}(w)=i_2,...,\xi_{n+k-1}(w)=i_k\}$ где i_j -элемент множества E, $n\leq j\leq n+k$.

В силу этого замечания мера P на (Ω,F) однозначно определяется своими значениями

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k) = P\{w:(\xi_n(w)=i_1,\xi_{n+1}(w)=i_2,...,\xi_{n+k-1}(w)=i_k\} \qquad (1)$$

на этих цилиндрах, где n -номер первой фиксированной координаты тонкого цилиндра и k -размерность цилиндра. По теореме Колмогорова [1], если для множества функций $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ справедливы следующие условия согласования

$$\begin{cases} P_n(i_1,i_2,...,i_k)\geq 0 \\ \sum_{i=1}^{N} P_n(i_1,i_2,...,i_k,i) = P_n(i_1,i_2,...,i_k) \\ \sum_{i=1}^{N} P_n(i) = 1 \end{cases} \qquad (2)$$

при всех k,n и $i_j\in E$, $1\leq j\leq k$, то существует единственная вероятностная мера P на F, для которой имеет место (2); кроме того, если

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k)=\sum_{i=1}^{N}P_n(i,i_1,i_2,...,i_k) \qquad (3)$$

при всех k,n и $i_j \in E$, $1\le j\le k$, то мера P сохраняется при преобразовании сдвига.

Таким образом, основную сложность при построении меры P на F составляет указание способа задания семейства функций $\{P_n(i_1,i_2,...,i_k)$, n и k натуральные$\}$, удовлетворяющих условию (2). Наиболее полно изучены следующие два способа построения семейства функции $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$.

1. **Схема Бернулли**. Пусть $m(\{i\})=P_i$ - распределения на $E=\{1,2,...,N\}$. Если положить

$$P(i_1,i_2,...,i_k)=P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_k} \qquad (4)$$

т.е. $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2), (3). Соответствующая (4) мера называется Бернуллиевской и в этом случае последовательность независимых одинаково распределенных случайных величине.

2. **Схема Маркова**. Пусть $\Pi=(P_{ij})_{i,j=1}^{N}$-стохастическая по строкам матрица. Если положить

$$P_n(i_1,i_2,...,i_k)=P_{i_1}P_{i_2}...P_{i_{k-1}i_k} \qquad (5)$$

т.е. $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ не зависит от n, то имеют место соотношения (2). Соответствующая (5) мера P называется Марковской. Если вектор вероятностей $P=(P_1,P_2,...,P_N)$ удовлетворяет условию $P\Pi=P$, то будет иметь место соотношение (3). В этом случае последовательность случайных величин $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует стационарную цепь Маркова.

Пусть $E=\{1,2,...,N\}$-конечное множество. Для квадратичного оператора $V:S^{N-1}\to S^{N-1}$ и произвольной точки симплекса $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)\in S^{N-1}$ положим $x^{(k+1)}=Vx^{(k)}$. На одномерных цилиндрических множествах функции $P_n(i)$ определим следующим образом:

$$P_n(i)=x_i^{(n-1)} \qquad (6)$$

для всех натуральных n и $i\in E$. Так как $x^{(n)}\in V^{(n)}(S^{N-1})\subset S^{N-1}$, то конструкция становится более простой, если квадратичный оператор V

сюрьективен, т.е. когда $V^{(n)}(S^{N-1})=S^{N-1}$. Очевидно из (6) следует $\sum_{i=1}^{N}P_n(i)=1$, так как $x^{(n-1)}\in(S^{N-1})$.

Таким образом, одно из условий (2) имеет место.

Для произвольных тонких цилиндров, функции $P_n(i_1,i_2,...,i_k)$ при $k>1$ определим образом

$$P_n(i_0,i_1,...,i_k)=x_{i_o}^{n}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}\cdot P_{i_2m_3,i_3}.....P_{i_{k-1}m_k,}x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_k}^{(n+k-1)} \qquad (7)$$

По построению функции (6)-(7) зависят от выбора начального распределения $x^{(0)}\in(S^{N-1})$ на E.

Первое условия (2), очевидно, выполняется. Покажем справедливость второго условия:

$$\sum_{i=1}^{N}P_n(i_0,i_1,...,i_k,i)=x_{i_o}^{n}\sum_{m_1,...,m_k,m_{k+1}=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}\cdot P_{i_2m_3,i_3}.....P_{i_{k-1}m_k,i_k}P_{i_km_{k+1},i}x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_{k+1}}^{(n+k-1)}=$$

$$x_{i_o}^{n}\sum_{m_1,...,m_k=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}.....P_{i_{k-1}m_k,i_k,}x_{m_1}^{(n)}\cdot x_{m_2}^{(n+1)}...x_{m_k}^{(n+k-1)}=P_n(i_0,i_1,...,i_k)$$

так как $\sum_{i=1}^{N}P_{i_km_{k+1},i}=1$ и $\sum_{m_{k+1}=1}^{N}x_m^{(n+k)}=1$.

Таким образом, существует единственная вероятностная мера P, определенная функциями (6)-(7), которую естественно назвать мерой, порожденной квадратичным операторам V и начальным распределением $x^{(0)}\in S^{N-1}$.

Задача изучения свойств мер, порожденных квадратичными операторами, достаточно сложна и требует громоздких вычислений. В этой статей мы ограничимся изучением мер, соответствующих двум квадратичным операторам, которые описывают некоторые модели наследственной передачи, предложенной Элстоном и Стюартом. Передача признака от родителей к потомству описывается тремя показателями вероятности этой передачи.

Рассмотрим теперь модель наследования для диплоидных организмов. В этом случае генотипы определяются парой аллелей A и α, т.е. в этом случае существуют три генотипа AA, Аα и $\alpha\alpha$. Квадратичный оператор, определяющей модель наследования в этом случае определяются следующими переходными вероятностями: $P_{AAAA,AA}, P_{AAA\alpha,AA}, P_{AA\alpha\alpha,AA}, P_{A\alpha A\alpha,AA}$ и.т.д.-всего 27- переходных вероятностей. В соответствии с гипотезой о менделевском типе наследования, очевидно,

$$P_{AAAA,AA}=1,\quad P_{AAA\alpha,AA}=1/2,\quad P_{AA\alpha\alpha,AA}=1/4,\quad P_{A\alpha A\alpha,AA}=0,...$$

для упрощения записи вместо $\{AA, A\alpha, \alpha\alpha\}$ будем рассматривать множество $E=\{1,2,3\}$. Тогда

$P_{11,1}=1$ $P_{12,1}=P_{21,1}=1/2$ $P_{13,1}=P_{31,1}=0$ $P_{22,1}=1/4$ $P_{23,1}=P_{32,1}=0$ $P_{33,1}=0$
$P_{11,2}=0$ $P_{12,2}=P_{21,2}=1/2$ $P_{13,2}=P_{31,2}=1$ $P_{22,2}=1/2$ $P_{23,2}=P_{32,2}=1/2$ $P_{33,2}=0$ (8)
$P_{11,3}=0$ $P_{12,3}=P_{21,3}=0$ $P_{13,3}=P_{31,3}=0$ $P_{22,3}=1/4$ $P_{23,2}=P_{32,2}=1/2$ $P_{33,3}=1$

Отметим, что этот менделевский квадратичный оператор не является сюрьективным (см. 6). В этом случае

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=(x_1^0+x_2^0/2)^2 \\ x_2^{(1)}=2(x_1^0+x_2^0/2)(x_3^0+x_2^0/2) \\ x_3^{(1)}=(x_3^0+x_2^0/2)^2 \end{cases} \qquad (9)$$

$$\begin{cases} x_1^{(1)}=(x_1^1+x_2^1/2)^2 \\ x_2^{(1)}=2(x_1^1+x_2^1/2)(x_3^1+x_2^1/2) \\ x_3^{(1)}=(x_3^1+x_2^1/2)^2 \end{cases} \qquad (10)$$

или, подставляя в (10) выражения (9) и упрощая, получим

$$\begin{cases} x_1^{(2)}=(x_1^0+x_2^0/2)^2 \\ x_2^{(2)}=2(x_1^0+x_2^0/2)(x_3^0+x_2^0/2) \\ x_3^{(2)}=(x_3^0+x_2^0/2)^2 \end{cases}$$

Таким образом, для любого начального распределения $x^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)$

$$x^{(k)}=x^{(1)} \qquad (11)$$

для любого $k>1$, т.е. со второго шага, наступает стабилизация частот генотипов AA, $A\alpha$, $\alpha\alpha$, что соответствует закону Харди- Вайнберга.

Пусть $x^{(0)}=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in S^2$ начальное распределение на $E=\{1,2,3\}$ и $P_{x^{(0)}}$ - вероятностная мера, соответствующая менделевскому оператору (8). Такие меры будем называть менделевскими.

Теорема 1.1. Для менделевских мер $P_{x^{(0)}}$ при любом $x^{(0)}\in S^3$ и любых натуральных k и l имеет место следующее равенство:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=i_0,\xi_{k+1}=i_1)=P_{x^{(0)}}(i_k=i_0)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=i_1)+\frac{P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=i_1)}{2^{l-1}}\alpha \qquad (12)$$

где $\alpha\in M=\{1/2x_2^1,\ (x_3+1/2x_2)(x_3-x_1),\ \text{-}1/2(x_3+1/2x_2)(x_3\text{-}x_1),$
$-x_3^{(1)},\ 1/2(x_3\text{-}x_1)^2,\ 1/2(x_1+1/2x_2)(x_3\text{-}x_1),\ \text{-}(x_1+1/2x_2)^2\}$

Доказательство. Доказательство теоремы проведем индукцией по l.

$$\{w:\xi_k(w)=i_0,\xi_{k+1}(w)=i_1,...,\xi_{k+1}(w)=i_i\}$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=i_0,\xi_{k+1}(w)=i_1,...,\xi_{k+1}(w)=i_l\})=$$

$$=x_{i_0}^{(k)}\sum_{m_1,...,m_l=1}^{N}P_{i_0m_1,i_1}\cdot P_{i_1m_2,i_2}\cdot.....P_{i_{l-1}m_l,i_l}\cdot x_{m_1}^{(k)}\cdot x_{m_2}^{(k+1)}...x_{m_l}^{(k+l-1)} \qquad (12)$$

откуда $P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=i_0,\xi_{k+l}(w)=i_1\})=x_i^{(k)}\sum_{m=1}^{N}P_{i_0m,i_1}x_m^{(k)}$ (13)

При $l=1$ в силу (8), (9), (10) и (13) имеем

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=1,\xi_{k+l}(w)=1\})=x_i^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,1}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}(x_1^{(1)}+$$
$$+1/2x_2^{(1)})=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/2P_{x^{(0)}}x_2^{(1)};$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=2,\xi_{k+l}(w)=2\})=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,2}x_m^{(k)}=x_2^{(1)}1/2(x_1^{(1)}+$$
$$+x_2^{(1)}+x_3^{(1)})=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2x_2^{(1)}(x_3-x_1)^2=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k)(x_3-x_1)^2;$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=3,\xi_{k+l}(w)=3\})=x_3^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{3m,3}x_m^{(k)}=x_3^{(1)}(x_3^{(1)}+$$
$$+1/2x_2^{(1)})=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+1/2P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)};$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=1,\xi_{k+l}(w)=2\})=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,2}x_m^{(k)}=x_1^{(1)}(x_3^{(1)}+$$
$$+1/2x_2^{(1)})=x_1^{(1)}x_2^{(1)}+x_1^{(1)}x_3^{(1)}-1/2x_1^{(1)}x_2^{(1)}$$
$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=2)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=1,\xi_{k+l}(w)=3\})=x_1^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{1m,3}x_m^{(k)}$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)-P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(x_3+1/2x_2)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=2,\xi_{k+l}(w)=3\})=x_2^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{2m,3}x_m^{(k)}=$$
$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=3)+P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)1/2(x_3+1/2x_2)(x_1-x_3).$$

•Предложим, что равенство (12) доказано для натурального $l>1$ и докажем это равенство для $l+1$. Для этого воспользуемся фундаментальным уравнением .

$$P_{i_0 i_1,k}^{[s,t+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}P_{i_0 i_1,k}^{[s,t]}P_{\alpha\beta,k}^{[t,t+1]}x_\beta^t$$

В нашем случае это уравнение принимает вид

$$P_{i_0 m,k}^{[k,k+l+1]}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{i_0 m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]} \qquad (14)$$

$$P_{x^{(0)}}(\{w:\xi_k(w)=i_0,\xi_{k+l+1}(w)=i_1\})=x_{i_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}P_{i_0 m,i_1}^{[k,k+l+1]}x_m^{(k)}=$$
$$x_{i_0}^{(k)}\sum_{m=1}^{3}\left(\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{i_0 m,\alpha}^{[k,k+l]}P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}\right)x_m^{(k)}=$$
$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}x_{i_0}^{(k)}\left(\sum_{m=1}^{3}P_{i_0 m,\alpha}^{[k,k+l]}x_m^{(k)}\right)P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{[k+l]}=$$
$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=i_0,\xi_{k+1}=\alpha\})P_{\alpha\beta,i_1}^{[k+l,k+l+1]}x_\beta^{(k)}$$

В силу (2)

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=i_0,\xi_{k+l+1}=i_1)=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\{\xi_k=i_0,\xi_{k+l}=\alpha\})P_{\alpha\beta,i_1}x_\beta^{(1)} \qquad (15)$$

Теперь, как и в случае $l=1$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1. Мы ограничимся рассмотрим только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i_0=i_1=1$ и $l=2$.

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+2}=1)=\sum_{\alpha=1}^{3}P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=\alpha)\sum_{\beta=1}^{3}P_{\alpha\beta,1}x_\beta^1=$$
$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1)(P_{11,1}x_1^{(1)}+P_{12,1}x_2^{(1)}+P_{13,1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)(P_{21,1}x_1^{(1)}+P_{22,1}x_2^{(1)}+P_{23,1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=3)(P_{31,1}x_1^{(1)}+P_{32,1}x_2^{(1)}+P_{33,1}x_3^{(1)})=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=1)(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)})+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\xi_{k+1}=2)(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)})=$$

$$(x_1^{(1)})^3+(x_1^{(1)})^2x_2^{(1)}/2+(x_1^{(1)})^2x_2^{(1)}/2+(x_2^{(1)})^2x_1^{(1)}/4+$$

$$(x_1^{(1)})^2x_1^{(1)}/2+(x_2^{(1)})^2x_2^{(1)}/4+(x_1^{(1)})^2(x_3+x_2/2)(x_3-x_1)/2+$$

$$1/4x_1^{(1)}x_2^{(1)}(x_3+x_2/2)(x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)P_{x^{(0)}}(\xi_{k+1}=1)+1/4P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

Теперь предложим, что для некоторых l справедливы следующие равенства:

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=1)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\ \ \xi_{k+l}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=2)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(x_3-x_1)^2$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=3,\ \ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=3)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=3)x_2^{(1)}$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=2)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=2)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(1/2x_2+x_3)(x_3-x_1)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=1)(-(x_2+2x_3)^2)$$

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=2,\ \ \xi_{k+l}=3)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=2)\ \ P_{x^{(0)}}(\xi_{k+l}=3)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=2)(1/2x_2+x_3)(x_1-x_3)$$

Легко доказывается также как и при переходе от $l=1$ к $l=2$, что эти равенства верны для $l+1$.

Для $l+1$ как и в случае $l=1$ и $l=2$ надо перебрать все возможные варианты значений i_0 и i_1 Мы ограничимся рассмотрением только одного случая. Остальные случаи доказываются аналогично. Пусть $i=j=1$ в силу (15)

$$P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l+1}=1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \xi_{k+l}=1)(P_{11.1}x_1^{(1)}+P_{12.1}x_2^{(1)}+P_{13.1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=2)(P_{21.1}x_1^{(1)}+P_{22.1}x_2^{(1)}+P_{23.1}x_3^{(1)})+$$

$$+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=3)(P_{31.1}x_1^{(1)}+P_{32.1}x_2^{(1)}+P_{33.1}x_3^{(1)})=$$

$$=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=1)(x_1^{(1)}+1/2x_2^{(1)})+P_{x^{(0)}}(\xi_k=1,\ \ \xi_{k+l}=2)(1/2x_1^{(1)}+1/4x_2^{(1)})=$$

$$=x_1^{(1)}x_1^{(k+l)}(x_1+1/2x_2+1/2x_2+x_3)+1/2^lx_1^{(1)}(x_1+1/2x_2)(x_3+1/2x_2)$$

$$(2x_1+x_2+x_3-x_1)=P_{x^{(0)}}(\xi_k=1)\ \ P_{x^{(0)}}\xi_{k+l+1}=1)+1/2^lP_{x^{(0)}}(\xi_k=1)x_2^{(1)}/2$$

что и требовалось показать.

REFERENCES

1. Колмогоров А.Н.,Основные понятые теории вероятностей. М,1936,138 с.
2. Гардинер К.В. Стохастические методы вестественных науках. М.: Мир. 1986,. 528 с.
3. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М: Мир,1969, 238 с. Макаров И.П. Дополнительные главы математического анализа. М., Просвещение, 1968.-308 с.
4. Ахмедов, Б. Б., Хошимов, Х. А. У., & Зокиров, А. И. У. (2022). РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ФОРМЫ. *Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences*, *2*(Special Issue 4-2), 942-947.
5. Сарымсаков Т.А., Ганиходжаев Р.Н. Центральная предельнаятеорема для квадратичных цепей.//УзМЖ, 1991.№I, с.57-64.
6. Ахмедов, Б. Б. (2020). УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ БЛОХА. In *Научный форум: технические и физико-математические науки* (pp. 20-25).
7. Мейлиев Х.Ж., Гуломов О.Х. (Кар ГУ).