О СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОСТАВНОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Муминов Фарход Маликович
канд.мат-физ. наук, доцент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: farxod.muminov.58@inbox.ru

Каримов Сардор Яшинович
Ассистент,
Алмалыкский филиал Ташкентского
государственного технического университета,
Республика Узбекистан, г. Алмалык
E-mail: mr_man89@mail.ru

АННОТАЦИЯ

В этом статье приводится постановка смешанных задач для уравнения составного типа третьего порядка. При определённых условиях на коэффициенты и правую часть уравнения доказывается корректности этих задач в пространстве С. Л. Соболева.

Ключевые слова: *уравнения, смешанная задача, уравнения составного типа, корректность.*

ABSTRACT

This article presents the formulation of mixed problems for a compound equation of the third order. Under certain conditions, the correctness of these problems in space is proved by the coefficients and the right side of the equation

Keywords: *equations, mixed problem, compound type equations, correctness*

В цилиндрической области DCR^{n+1} рассмотрим дифференциальное уравнения третьего порядка

$$Lu \equiv -\frac{\partial \Delta u}{\partial t} + K(x,t)U_{tt} + \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_1} + \alpha(x,t)U_t + \beta(x,t)U + \gamma(t)|U|^{\rho}U = f(x,t) \qquad (1)$$

где $\Delta U = U_{tt} + \sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_1}$.

Отметим, что уравнения вида (1) относятся к классу уравнений составного типа [1], [2], [3]. Исследование краевых задач для уравнений составного типа представляет большой интерес, собственно в многомерном случае[3].

Всюду ниже будем предполагает, что

$K(x,t)\in C(\overline{D})\cap C'(D), \alpha(x,t)\in C(\overline{D})$

$\beta(x,t)\in C(\overline{D})\cap C'(D),\ \ o\le\gamma(t)\in C'[0,1]$

$-1<\rho<\dfrac{2}{n-1}$, при $n\ge 3$

($\rho>-1$, произвольно и конечно при n=1,2)

Обозначим через $\nu=(\nu_1\nu_2.......\nu_n)$ вектор внутренний нормали к S.

Смешанная задача 1. Найти решения уравнения (1). В области D и такое, что

$$\left.\begin{array}{ll} U\big|_{t=0}=0, & U(x,t)\big|_{t=1}=0 \\ U_{tt}(x,t)\big|_{t=0}=0, & U(x,t)\big|_{S}=0 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(2) Обозначим через C_L класс функций из пространства

$H=\left\{U:U\in W_2^2(D); \dfrac{\partial\Delta U}{\partial t}\in L_2(D), U_t\in L'_p(D)\right\}$

удовлетворяющих условиям (2). В пространстве L'_ρ, $\rho=S+2$ норма определяется следующем образом

$\|U\|^P_{L'_P(D)}=\int\limits_D f(t)|U|^\rho\,dxdt$

Определения. Назовем функцию $U(x,t)$ регулярным решениям задачи (1)-(2), если

$U(x,t)\in C_L$

$|U|^\rho U\in L_2(D);\quad \dfrac{\partial}{\partial t}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\in L'_2(D),\quad \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\in L^\gamma_2(D),$

и *u(x,t)* удовлетворяет уравнению (1) почти всюду в области D.

Теорема. Пусть выполнены выше указанные условия для коэффициентов уравнения (1). Пусть кроме того всюду в области D выполнены условия

$2\alpha(x,t)-\lambda K-K_t-\lambda^2\ge\delta>0$

$-\lambda\beta-\beta_t\ge\delta_1>0,\qquad K(x,0)+\lambda\le 0,\qquad \beta(x,0\le 0)$

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой что $f\in L_2(D)$ существует единственный регулярное решении задачи 1.

Докажем справедливость следующих оценок:

$$\|U_{tt}\|^2_{L_2(D)}+\|\Delta U_t\|^2_0+\|U\|^2_{W'_2(D)}+\|U_t\|^\rho_{L_\rho(D)}\le m\|f\|^2_0$$

$$\left\|\frac{\partial\Delta U}{\partial t}\right\|^2_0+\sum_{i=1}^n\left\|U_{x_ix_i}\right\|^2_0+\frac{\rho+1}{(0{,}5\rho+1)}\left[\left\|\frac{\partial}{\partial t}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\right\|^2_{L'_P(D)}+\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|U|^{\rho/2}U\right)\right\|^2_{L'_P(D)}\right]\le m_2\|f\|^2_0$$

Для этого воспользуемся методам Галеркина $(см[5])$, с выбором специального базиса

Пусть $\varphi_n(xt)$ собственные функции краевой задачи

$$\Delta\varphi_n(x,t) = -\mu_n^2\varphi_n(x,t) \tag{3}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_n(x,t)\big|_{t=1} \quad (\varphi_{n_t} - \lambda\varphi_n)\big|_{t=0} \\ \varphi_n(x,t)\big|_S = 0\end{array}\right\} \tag{4}$$

где $n = 0,1,2,.....$

$$U^V(x,t) = \sum_{i=1}^{N} C_n W_n(x,t) \tag{5}$$

где C_n определяются из системы нелинейно алгебраических уравнений вида

$$(LU^N, \varphi_S)_0 = (f, \varphi_S)_0, \qquad S = 1,2,......N \tag{6}$$

Разрешимость этой системы следует из полученных ниже оприорных оценок приближенных решений из леммы и «об остром угле» [6]. Умножая (6) на $2C_S$ суммируя по S от 1 до N получим тождество

$$(LU^V, e^{\lambda t}U_t^V)_0 = (f, e^{\lambda t}U_t)_0 \tag{7}$$

Применяя к (7) формуле Грина и неравенство Коши

$$2|a||b| \le \gamma|a|^2 + \frac{1}{\gamma}|b|^2, \qquad \forall\gamma > 0$$

Получим

$$\|U_{tt}^N\|_0^2 + \|\nabla U_t^N\|_0^2 + \|U_t\|_{L_\rho(D)}^P + \|U\|_{W_2^1(D)}^2 \le m_3\|f\|_0^2$$

Вернемся к вопросу о разрешимости системы уравнений (7). Если записать ее в виде $P_N(\vec{C}) = 0$, где

$$\vec{C} = \exp(\lambda t)(c_1, c_2, c_3, ..., c_n)$$

то справедлива оценка

$$(P_n(\vec{C}), \vec{C})_0 \ge m_0\|U^V\|_{W_2'(D)} - m_4$$

где m_0 и m_4 некоторые положительные постоянные. В силу того, что линейная оболочка $\Phi\{W_1, W_2, ...W_n\}$ есть конечномерное пространство, то существует $R_1(N) > 0$ такое, что

(E)ISSN: 2181-1784
4(02), Feb., 2024
www.oriens.uz

$$\left\|U^N\right\|^2_{W_2^l(D)} \geq R_1(N)\sum_{K=1}^{N}\left(C_K\right)^2$$

Значит выполнено неравенство

$$\left(P_N\left(\vec{C}\right),\vec{C}\right)_0 \geq R_1(N)\left|\vec{C}\right|^2 - m_4 \geq 0$$

Если $\left|\vec{C}\right|$ достаточно большая величина, а это есть условия «острого угля» достаточное для разрешимости системы уравнений (7). Для того чтобы последовательность решений $\left\{U^V\right\}$ было ограничена в $H(D)$ необходимо оценить производную $\frac{\partial \Delta U}{\partial t}$ и $U_{x_I x_I}$. С этом целью благодаря (3)-(4) мы можем заменить φ_N в (7) на $-\frac{1}{\mu_n^2}\Delta\varphi_n$. Умножая в (7) на C_n и суммируя по n от 1 до N находим

$$\left(Lu^V, \frac{-2}{\mu_n^2}\ell^{\lambda t}\left[\frac{\partial \Delta U^V}{\partial t} + 2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^V\right]\right)_0 = -\frac{2}{\mu_n^2}\left(f, e^{\lambda t}\left[\frac{\partial \Delta U^V}{\partial t} + 2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^V\right]\right)_0 \qquad (8)$$

Применяя формулу Грина, получим

$$\int_D e^{\lambda t}\left\{\left(\frac{\partial \Delta U^N}{\partial t}\right)^2 + \frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial^2 U^V}{\partial x_i^2}\right)^2 - \sum_{i=1}^{N} U_{x_i x_i}^V U_{tt}^N + \frac{\partial \Delta U^V}{\partial t}\right\} + \left[(2\lambda - K(x,t))U_{tt}^N + \left(\lambda^2 + \alpha(x,t)\right)U_t^V + \beta(x,t)U^N\right] -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 U^2}{\partial x_i^2}\left[\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right] + \left[2\lambda U_{tt}^N + \lambda^2 U_t^N\right]\left[- K(x,t)U_{tt}^N - \alpha(x,t)U_t^N - \beta(x,t)U^N\right]\}dxdt +$$

$$+\frac{1}{2}\int_S e^{\lambda t}\left[U_{x_i}^N V_t + \gamma(t)\left|U_t^N\right|^{S+1} U_{tt}^N V_t + \gamma(t)|U|^{\rho+2} U_{x_i} V_{x_i}\right]dS + \int_D e^{\lambda t}\left[\gamma(t) e^{\lambda t}\left|U^N\right| U_{tt}^N dxdt +\right.$$

$$+2\int_D \lambda e^{\lambda t}\left|U_t^N\right| U_{tt}^N - \lambda^2\int_D e^{\lambda t}\left|U_t^N\right|^{S+2} dD + \int_D e^{\lambda t}\gamma(t)(S+1)\left[\left|U_t^N\right|^S U_{tt}^N + \left|U^N\right|^S U_{x_i}^N\right]dxdt = \sum_{K=1}^{6} I_K \qquad (9)$$

(I_1-интеграл по области, I_2–интеграл по границе, I_3, I_4, I_5, I_6-интегралы по области с нелинейными членами). Из оценки (3) применяя неравенство Коши в I_1 получим, что интеграл I_1, допускает оценку

$$I_1 \geq m_6\int_D\left[\left(\frac{\partial \Delta U}{\partial t}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 U^N}{\partial x_i^2}\right)^2\right]dD$$

(10)

Учитывая условие (2) получим

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{\partial^2 U^N(x,0)}{\partial x_i^2}\right]^2 dx \geq 0$$

Члены из (10) не являющимся билинейными, можно переписать в виде

$$I_6 = \frac{2(\rho+1)}{0{,}5\rho+1}\int_D e^{\lambda t}\gamma(t)\left[\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\left|U^N\right|^{\frac{\rho}{2}}U^N\right)^2\right\}+\sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|U^N\right|^{\frac{\rho}{2}}U^N\right)\right\}^2\right]dxdt \quad (11)$$

Из представления (10) видно, что $I_6 > 0$ Нам осталось оценить интегралы $I_3 + I_4$. т.е.

$$I_3 + I_4 = \int_D e^{\lambda t}\left[\gamma(t)e^{\lambda t}\right]\left|U_t^N\right|^{\rho+1}\cdot U_{tt}^N dxdt + 2\int_D \lambda e^{\lambda t}\gamma(t)\left|U^N\right|^{\rho+1}U_{tt}^N dxdt = \int_D e^{\lambda t}\left(\gamma_t(t) - \lambda\gamma(t)\right)\left|U^N\right|U_{tt}^N dxdt$$

В силу неравенства Гёлдера, имеем

$$I_3 + I_4 \geq -\max\left|\gamma_t(t) - \lambda t\right| \cdot \left\|U^N\right\|_{L_\rho(D)}^{\rho}\left\|U^N\right\|_{L_q(D)}^{'}\left\|U_{tt}^N\right\|_0$$

где q (как и в теореме вложения Соболева) определяется из равенства

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{q}+\frac{1}{2}=1.$$

Поскольку, согласно $S \leq \frac{2}{n-2}$, следует $S \leq q$ то в силу (3) имеем

$$\left\|U_t^N\right\|_{L_\rho} \leq const\left(\|f\|_0\right)$$

Итак

$$I_3 + I_4 \geq -const\left(\|f\|_0\right)\max\left|\gamma_t + \lambda\gamma\right|\left\|U_t^V\right\|_{U_q}\left\|U_{tt}^V\right\|_0 \quad (12)$$

При выполнении условии теоремы на параметр S (12) имеем вложение

$$W_2'(D) \subset L_q(D)$$

Положим $const\left(\|f\|_0\right)\max\left|V_t - \lambda\gamma(t)\right| < \delta_3$ и применяя неравенства Коши к (12) получим

$$I_3 + I_4 \geq -\frac{\delta_3}{2}\left\|U_{tt}^N\right\|_0^2 - \frac{\delta_3}{2}\left\|U_t^N\right\|_{W_2'(D)}^2$$

Следовательно вытекает вторая оценка. Итак мы получили необходимые априорные оценки для приближенного решения задача (1)-(2). Поскольку все производные, входящие в уравнение (1) квадратично суммируемы по области D, то по известной теореме о слабой компактности следует, что из ограниченной последовательности функций $\{U^N\}$ можно извлечь слабо сходящуюся последовательность функции $\{U^{N_i}\}$ такую, что при $N_i \to \infty$ имеем

$$U^{N_i} \text{ слабо в } W_2^2(D)$$

$$\|U^{N_i}\|U^{N_i} \to \psi \text{ слабо в } L_{\frac{\rho+2}{\rho+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\|U^{N_i}\|^{\frac{\rho}{2}} U^{N_i}\right) \to \psi_1 \text{ слабо в } L_2(D)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\|U^{N_i}\|U^{N_i}\right) \to \psi_2 \text{ слабо в } L_2(D)$$

$$\frac{\partial \Delta U^{N_i}}{\partial t} \to \frac{\partial \Delta U}{\partial t} \text{ слабо в } L_2(D)$$

Согласно лемме 1.3 из [6] предельном переходе в нелинейном члене имеем

$$\psi = |U|^{\frac{\rho}{2}} U\,;\ \psi_1 = \frac{\partial}{\partial t}\left(|U|^{\frac{\rho}{2}} U\right);\ \psi_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|U|^{\frac{\rho}{2}} U\right).$$

Теперь мы можем осуществить предельный переход в тождестве (9) при $N_i \to \infty$. Тем самым существование регулярного решения задачи (1)-(2) доказана.

Для доказательства единственности полученного решения рассмотрим разность двух возможных решении $V(x,t) = U_1 - U_2$ где U_1 и U_2 два решения задачи, тогда $V(x,t)$ удовлетворяет уравнение

$$LV = -\frac{\partial \Delta V}{\partial t} + K(x,t)V_{tt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \gamma V_t + \beta V + [\gamma(t)|U_1|U_1 - \gamma(t)|U_2|U_2] \equiv 0$$

(13)

с краевыми условиями (2). Непосредственно из оценки (3) следует что

$$\|V_{tt}\|_0^2 + \|\nabla V_t\|_0^2 + \|V\|_{W_2^1(D)}^2 + \int_D e^{\lambda t}\left[|u_1|^{\rho} u_1 - |u_2|^{\rho} u_2\right](u_1 - u_2)dD \le 0$$

(14)

Учитывая монотонность оператора $|u|^{\rho} u$, получим $\int_D e^{\lambda t}\left[|u_1|^{\rho} u_1 - |u_2|^{\rho} u_2\right](u_1 - u_2)dxdt \ge 0$

Тогда из (14) следует, что $\|V_{tt}\|_0^2 + \|\nabla V_t\|_0^2 + \|V\|_{W_2^1(D)}^2 \le 0$ и значит $V(x,t) = 0$. т.е. $u_1(x,t) = u_2(x,t)$ в D. Тот факт завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА (REFERENCES)

1. Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981, -448 стр.

2. Березанский Ю.М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965.

3. Бицадзе А.В. Об одной задаче Франкеля. Докл. АН СССР, 1956, -Т. 109, №6.

4. Врагов В.Н. Краевые Задачи неклассических уравнений математической физики. – Новосибирск: ИГУ, 1983, -84 стр.

5. Муминов Ф.М., Каримов С.Я., Утабов У нелокальная краевая задача для линейных уравнений смешанного типа Oriental renaissance: Innovative, educational, natural and social sciences, Volume 2 ISSUE 11 ISSN 2181-1784 SJIF 2022: 5.947 ASI Factor = 1.7

6. Муминов Ф.М., Миратоев З.М. О нелокальной краевой задаче для одного неклассического уравнения. «Scientific progress» Scientific Journal. April 2021. ISSN: 2181-1601 Volume: 1, ISSUE: 6.

7. Муминов Ф.М., Муминов С.Ф. Об Одной Нелокальной Краевой Задаче Для Уравнения Смешанного Типа. CENTRAL ASIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL THEORY AND COMPUTER SCIENCES. Volume: 02 Issue: 04 | April 2021 ISSN: 2660-5309.

8. Muminov F.M., Bekmurodov U.N. Mixed boundary value problems for composite type equation. International Engineering Journal for Research and Development Vol.5, Issue 6, September 10, 2020.

9. Трикоми Ф.О. Линейных уравнениях смещанного типа. М. Гостехиздат, 1947.

10. Франкель Ф.И. Избранные труды по газовой динамике. М.: Наука, 1973.

11. M.M.Usarovich, A.Y.Shahabidinovna, M.Z. Mirvaliyevich, Tools for formalized description and transformation of algorithms aimed at synthesizing devices of control computing systems. - International Engineering Journal For Research &…, 2020.

12. Соболев С.И. Пример корректности кривой задачи для уравнения колебаний струны с данными на всей границе Докл. А.К. СССР. 1956. Т109№4 с 707-709